PISANO

OPUSCOLI

N. 31



OPUSCOLI

DI

LEONARDO PISANO





OPUSCOLI

DI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATI

DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SECONDO LA LEZIONE

DI UN CODICE DELLA BIBLIOTECA AMBROSIANA DI MILANO

SECONDA EDIZIONE









FIRENZE
TIPOGRAFIA GALILEIANA
di M. Cellini e C.

1856





PREFAZIONE

Gli opuscoli di Leonardo Pisano, contenuti nel presente volumetto, trovansi in un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano, contrassegnato *E.* 75, *Parte Superiore*, membranaceo, in quarto, del secolo decimoquinto, e composto di quarantadue carte, numerate tutte nel *recto*, salvo la prima, coi numeri 1–41.

Questi opuscoli furono per la prima volta dati in luce nel 1854, in un volumetto, in 8.°, di 128 pagine, numerate tutte, salvo le prime cinque e le ultime due, coi numeri 2–122. Nella terza pagina di questo volume si legge: « Tre scritti inediti | di | « Leonardo Pisano | pubblicati | da Baldassarre

« Boncompagni | secondo la lezione | di un Co-
« dice della Biblioteca Ambrosiana di Milano | Fi-
« renze | Tipografia Galileiana | di M. Cellini
« e C. | 1854 ».

In questa prima edizione sfuggirono molti errori, tre de' quali furono notati e corretti dal sig. Angelo Genocchi in una sua opera intitolata: « Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pub-« blicati da Baldassarre Boncompagni Note anali-« tiche (1) », ed altri furono anche gentilmente notati e corretti dal signor Lebesgue, Professore di matematiche nella Facoltà delle Scienze di Bordeaux, in alcune carte interposte ad un esemplare da me ora posseduto della prima edizione suddetta.

(1) *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni Note analitiche di Angelo Genocchi. Roma Tipografia delle Belle Arti* 1855, in 8.°, pag. 64, lin. 26-27, nota 3 della pag. 63; pag. 80, lin. 29-30; pag. 109, lin. 23-25. — *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, compilati da Barnaba Tortolini Professore di Calcolo Sublime, e Membro del Collegio Filosofico all' Università Romana, Professore di Fisica Matematica nel Collegio Urbano e nel Pontificio Seminario Romano, Socio ordinario della Pontificia Accademia de' Nuovi Lincei, Uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Accademia Reale di Torino, dell' Istituto di Bologna, della Reale Accademia delle Scienze, e della Pontaniana di Napoli e dell' Accademia di Messina. Roma Tipografia delle Belle Arti,* 1850-1856, sette tomi, in 8.°, tomo sesto, pag. 276, lin. 26-27, nota 3 della pag. 275; pag. 292, lin. 29-30, nota 3; pag. 345, lin. 23-25, nota 1.

Nella presente ristampa degli anzidetti opuscoli tutti i soprammentovati errori sono stati corretti.

In questa ristampa trovansi aggiunte sei note (1) che non sono nella prima edizione descritta di sopra (2), e modificate tre note della prima edizione stessa (3).

Uno de' suddetti opuscoli di Leonardo Pisano è intitolato: *Flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam uel ad utrumque pertinentium* (4). A quest' opuscolo appartiene certamente tutto ciò che si legge nella presente ristampa, dalla linea decimaquinta della pagina 2 all'ultima linea della pagina 43, e nel Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, dalla linea vigesimanona della carta numerata 1 *recto*, alla linea quarta della carta 15 *recto*. Trovasi poscia nel Codice mede-

(1) Vedi più oltre pag. 87, lin. 25-31, nota (1); pag. 92, lin. 26-31, nota (1); pag. 93, lin. 24-32, nota (1); pag. 95, lin. 29-31; pag. 96, lin. 19-24, nota (1) della pag. 95; pag. 96, lin. 25-30, nota (1); pag. 98, lin. 25-32, nota (1).

(2) Pag. v non numerata, lin. 9-15, pag. vi, lin. 1-3.

(3) *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, pag. 58, lin. 27-30; pag. 119, lin. 28-29; pag. 121, lin. 28-30; pag. 122, lin. 7-9. — Vedi più oltre, pag. 57, lin. 19-29; pag. 58, lin. 12-33; pag. 119, lin. 18-30; pag. 122, nota (2), lin. 19-22.

(4) Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, carta numerata 1 *recto*, lin. 1-2. — Vedi più oltre, pag. 28ª non numerata, lin. 1-3.

simo (1), e nella presente ristampa (2) una lettera intitolata (3): « *Epistola suprascripti Leonardi ad* « *Magistrum Theodorum phylosophum domini Im-* « *peratoris* ». Subito dopo questa lettera trovasi nel precitato Codice (4) tutto ciò che nella presente ristampa si legge dalla linea decimasettima della pagina 44, alla linea ultima della pagina 54.

Le carte numerate 19–39 del Codice suddetto contengono un esemplare incompleto di un'operetta di Leonardo Pisano, intitolata in questo Codice: *liber quadratorum compositus a leonardo pisano Anni. M.CC.XXV.* (5). Questo esemplare trovasi stampato interamente nelle pagine 55–122 della presente edizione.

I suddetti opuscoli sono stampati nel presente volumetto come si leggono nel soprammentovato Codice Ambrosiano, salvo alcuni piccoli cambiamenti che sono stati fatti nell'ortografia, a fine di rendere più agevole la lettura di tali opuscoli.

(1) Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, carta numerata 15 *recto*, lin. 6–18.

(2) Pag. 44, lin. 3–16.

(3) Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, carta numerata 15 *recto*, lin. 5–6.

(4) Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, carta numerata 15 *recto*, lin. 19 — carta 18 *verso*, lin. 10.

(5) Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, carta numerata 19 *recto*, lin. 1. — Vedi più oltre pag. 55 non numerata, lin. 1–2.

Nelle linee 6.ª–10.ª della carta 27 *verso* di questo Codice trovasi il brano seguente stampato nel presente volumetto a pag. 84, lin. 28–29, ed a pag. 85, lin. 1: « *tunc impossibile erit inuenire* « *duas multitudines imparium numerorum conti-* « *nuas in proportione quam habet numerus* a g *ad* « *numerum* d g ». Il sig. Angelo Genocchi nelle sue *Note analitiche* suddette giustamente avverte che questo brano dev' essere cancellato (1).

Il *recto* ed il *verso* di ciascuna carta numerata del sopraccitato Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, salvo il *recto* della prima, trovansi indicati nei margini laterali esterni della presente edizione nel modo seguente: *fol.* 1 *verso*, *fol.* 2 *recto*, ec. Una linea verticale separa nel testo dell'edizione medesima l'ultima parola di ciascuna di tali pagine, dalla prima parola di quella che la segue immediatamente.

Nel volume primo dell'opera del Padre D. Pietro Cossali, intitolata: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, si legge (2):

(1) *Genocchi*, *Note analitiche*, pag. 64, nota 3 della pag. 63.

(2) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. Pietro Cossali C. R. Dalla Reale Tipografia Parmense* cIↃ. IↃCC. XCVII. — cIↃ. IↃCC. XCIX, due volumi in 4.°; vol. I, pag. 165–166.

« Riferisce Targion Tozzetti nel tomo II de'suoi « Viaggi, che tra i manoscritti della biblioteca del « regio Spedale di Santa Maria-Nuova di Firenze « conservavasi in un grossissimo volume in-foglio « un trattato di abaco compilato da un anonimo, « il quale, a libro 16.° della compilazione avea « posto il lavoro di Leonardo sopra i numeri qua- « drati. Desiderando io di questo copia, ne scrissi al « dottissimo amico abate Francesco Fontani bi- « bliotecario della Riccardiana; ma ebbi risposta, « che essendosi alcuni anni addietro dispersa quella « librerìa, non avea potuto della sorte di quel « codice sapere cosa alcuna ».

Il sopraccitato primo volume della suddetta opera del Padre Cossali ha nel frontespizio la data del 1797. In varie opere stampate dopo il 1797 si legge che il *Trattato de'numeri quadrati* di Leonardo Pisano è perduto (1).

(1) *Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara. Translated by Henry Thomas Colebrooke, Esq. F. R. S.; M. Linn. and Geol. Soc. and R. Inst. London: As. Soc. Bengal; Ac. Sc. Munich. London: John Murray, Albemarle Street*, 1817, in 4°, pag. LVII, lin. 16. — *Miscellaneous Essays by H. T. Colebrooke. In two volumes. London: Wm. H. Allen and Co., Leadenhall Street.* 1837, due vol. in 8.°, vol. II, pag. 494, lin. 19 — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, suivi d'un*

Nella seconda edizione dell'*Histoire des Mathématiques* del Montucla si legge: « Léonard de Pise

Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie; par M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique. Bruxelles, M. Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale. 1837, in 4°, pag. 520, lin. 30–31. — *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden. Von Chasles. Aus dem Französischen übertragen durch Dr. L. A. Sohncke, ord. Professor der reinen Mathematik an der vereinten Friedrichs — Universität Halle-Wittenberg. Halle, Gebauersche Buchhandlung.* 1839, *in* 8.°, pag. 610, lin. 21–28. — *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle, par Guillaume Libri. Tome premier. Paris, Librairie de Paulin, Rue de Seine, N.°* 33, 1835, in 8.°; pag. ij, lin. 12–14, note (1). — *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle, par Guillaume Libri. A Paris, Chez Jules Renouard et C.ie, Libraires, Rue de Tournon,* N.° 6., 1838–1841, 4 tomi, in 8.°; t. I, pag. x, lin. 21–23, nota (1); t. II, pag. 27, lin. 18–26, nota (1); pag. 39, lin. 16, pag. 40, lin. 1–9. — *Storia delle scienze matematiche in Italia di Guglielmo Libri, Versione di Luigi Masieri, Dottore in Fisica e Matematica. Milano, Tipografia e Libreria Pirotta e C. Contrada di Santa Radegonda, N.* 964; 1842–1843, due tomi incompleti, in 8.°, *tomo primo*, pag. 6, nota (1), lin. 17–19; *tomo secondo*, pag. 11, lin. 6–8; pag. 20, lin. 3–9. — *Nuova Enciclopedia popolare ovvero Dizionario generale di scienze, lettere, arti, storia, geografia, ec. ec. opera compilata sulle migliori in tal genere, Inglesi, Tedesche e Francesi, coll'assistenza e col consiglio di scienziati e letterati Italiani, corredata di molte incisioni in legno inserite nel testo e di tavole in rame. Torino Giuseppe Pomba e Comp. Editori* 1841–1851; 14 tomi, in 8.° grande; tomo quinto, pag. 1122, col. 1, lin. 22–25, col. 2, lin. 7–9, articolo FIBONACCI (LEONARDO). — *I Benefattori dell'umanità ossia vite e ritratti degli uomini d'ogni paese e d'ogni*

« avoit aussi écrit un traité intitulé *De' numeri qua-* « *drati*, qui ne se trouve plus » (1). Il signor Abate Giuseppe Avanzini, in un suo scritto intitolato: « Elogio di Pietro Cossali », parlando di Leonardo Pisano, dice (2): « Il Libro dei numeri « quadrati di Leonardo andò disperso, o perduto, « o sepolto in qualche Biblioteca, e le dottrine, « ch'esso contiene non si trovano che nell'algebra « di Frate Luca, due secoli e mezzo dopo com- « posta, senza ordine, oscuramente esposte, non

condizione i quali hanno acquistato diritto alla pubblica riconoscenza, opera pubblicata in Francia dalla Società Montyon e Franklin, ed ora per la prima volta in Italiano tradotta e di giunte ampliata. Firenze presso Luigi Ducci e Comp. Editori 1843–1850, 6 volumi, in 8.° grande, vol. VI, pag. 339, lin. 18-23.

(1) *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée, et prolongée jusque vers l'époque actuelle; Par J. F. Montucla, de l'Institut national de France. A Paris, chez Henri Agasse, libraire, rue des Poitevins, n.° 18. An. VII. — An. X (mai* 1802), 4 tomi in 4.°; t. II, pag. 715, lin. 45–46. (Additions.)

(2) *Elogio di Pietro Cossali scritto dal socio Ab. Giuseppe Avanzini, inserito nel tomo XIX degli Atti della Società Italiana delle Scienze residente in Modena. Modena presso la Tipografia Camerale MDCCCXXIV*, in 4.°, pag. 15, lin. 18-23. — *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana. Verona-Modena* 1782-1852, 25 tomi, in 4.°; tomo XIX, fascicolo primo, pag. CXXIII.

« poche senza dimostrazioni, o con dimostrazioni « assai difettose ». Questo *Libro* o *Trattato de' numeri quadrati*, di Leonardo Pisano, è il *Liber quadratorum* che ora viene in luce nel presente volumetto.

L'importanza dei sopraccitati opuscoli di Leonardo Pisano è dimostrata ne' seguenti scritti:

1. « Intorno | ad alcune opere | di | Leonardo « Pisano | matematico del secolo decimoterzo | Notizie raccolte | da Baldassarre Boncompagni | « Socio ordinario dell' Accademia Pontificia | « de' Nuovi Lincei | Roma | Tipografia delle Belle « Arti | 1854 ». Un volume in 8.° di pagine 400. Questo scritto fu in parte pubblicato nella raccolta intitolata: « Giornale Arcadico di scienze, lettere, « ed arti. Roma 1849-1855; » (142 tomi, in 8.° t. CXXXI, pag. 3-129; t. CXXXII, pag. 3-176; t. CXXXIII, pag. 3-91.) Contiene varie notizie relative a tre diverse traduzioni italiane del suddetto *Liber quadratorum* (1), a parecchi problemi risoluti ne' precitati opuscoli di Leonardo Pisano (2),

(1) *Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti*, t. CXXXI, pag. 25-26; t. CXXXIII, pag. 40-50. — *Boncompagni*, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, pag. 28-29, 340-349.

(2) *Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti*, t. CXXXI, pag. 6-16; t. CXXXIII, pag. 40-48. — *Boncompagni*, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, pag. 4-17, 340-347.

ad alcuni personaggi menzionati nel suo *Flos* e nel suo *Liber quadratorum* (1), ed a quattro manoscritti, nei quali trovansi citate queste ed altre opere di Leonardo Pisano (2).

2. Un opuscolo di due pagine, in 4.°, nella prima delle quali (lin. 1–4) si legge: « INSTITUT IMPÉRIAL « DE FRANCE. | ACADÉMIE DES SCIENCES. | Extrait des « *Comptes rendus des séances de l'Académie des* « *Sciences*, tome XXXIX, | séance du 18 décem- « bre 1854 ». Quest'opuscolo è inserito nella Raccolta intitolata: « Comptes rendus hebdomadaires des « séances de l'Académie des Sciences, publiés con- « formément à une décision de l'Académie en date « du 13 Juillet 1835, par MM. les Secrétaires « Perpétuels ». Paris, Bachelier, Imprimeur-Librai- « re, Quai des Augustins, n.° 55, 1835–1856 »,

(1) *Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti*, t. CXXXI, pag. 10–108. — *Boncompagni*, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, pag. 7–108.

(2) *Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti*, t. CXXXI, pag. 108–129; t. CXXXII, pag. 3–176; t. CXXXIII, pag. 3–51. — *Boncompagni*, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, pag. 108–350. — I quattro manoscritti sopraccitati (vedi la linea quinta di questa pagina XIV) sono i Codici Ottoboniano, N. 3307 della Biblioteca vaticana di Roma, *L. IV.* 20 della Biblioteca Pubblica Comunale di Siena, *E.* 5. 5. 11, ed *E.* 5. 5. 18 dell' I. e R. Biblioteca Palatina di Firenze.

(43 tomi, in 4.°, *tome trente-neuvième. Juillet-Décembre* 1854, pag. 1171).

3. Un opuscolo di sei pagine, in 4.°, nella prima delle quali (lin. 1-5) si legge: « *Sur un essai* « *de déterminer la nature de la racine d'une équa-* « *tion* | *du troisième degré, contenu dans un ouvra-* « *ge de Léonard de* | *Pise découvert par M. le prince* « *Balthasar Boncompagni*; | PAR M. WOEPCKE. | « (Extrait du *Journal de Mathématiques pures et* « *appliquées*, tome XIX, 1854) ». Quest'opuscolo è inserito nella raccolta intitolata: « Journal de Ma- « thématiques pures et appliquées, ou recueil men- « suel de Mémoires sur les diverses parties des Ma- « thématiques; Publié par Joseph Liouville, Ancien « Elève de l'Ecole Polytechnique, répétiteur d'Ana- « lyse à cette Ecole. Première Série. Paris, 1836- « 1855 », (20 tomi in 4.°, t. XIX. — *Année* 1854, pag. 401-406).

4. Un opuscolo di nove pagine, in 4.°, nella prima delle quali (lin. 1-4) si legge: « *Note sur* « *le* Traité des nombres carrés, *de* LÉONARD DE « PISE, | *retrouvé et publié par M. le prince* BAL- « THASAR BONCOMPAGNI; | PAR M. WOEPCKE. (Ex- « trait du *Journal de Mathématiques pures et* « *appliquées*, tome XX, 1855) ». Quest' opuscolo trovasi inserito nel suddetto *Journal de mathéma-*

tiques pures et appliquées, tome XX. — *Année* 1855, pag. 54–62.

5. Un opuscolo di dieci pagine, in–4.°, nella prima delle quali (lin. 1–7) si legge: « INSTITUT IMPÉ- « RIAL DE FRANCE. | ACADÉMIE DES SCIENCES. | Extrait « des *Comptes rendus des séances de l'Académie* « *des Sciences*, tome XL, | séance du 2 avril « 1855. | *Remarques sur quelques points intéres-* « *sants des ouvrages de* FIBONACCI | *découverts et* « *publiés récemment par* M. LE PRINCE BONCOMPA- « GNI. | Communiquées par M. CHASLES. » Quest'opuscolo è inserito nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, *Tome Quarantième*, *Janvier–Juin* 1855, pagine 775–784.

6. L'ultimo degli articoli contenuti in un fascicolo di 66 pagine, in 4.°, nella prima delle quali si legge: « Rendiconto | della | Società Reale « Borbonica | Accademia delle Scienze | Anno IV | « della Nuova Serie | Napoli | Stabilimento tipografico « di Gaetano Nobile | Vicoletto Salata a' Ventaglieri « n. 14 | 1855 ». Quest'articolo, contenuto nelle pagine numerate 51–65 di questo fascicolo, è intitolato nelle prime quattro linee della pagina 51 del fascicolo medesimo così: « ARTICOLO IV | NOTE E « COMUNICAZIONI ACCADEMICHE. | *Sulla più recente pub-*

« *blicazione, fatta dal Boncompagni,* | *di tre scritti* « *inediti di Leonardo Pisano* (1) ».

7. Un opuscolo, in 8.°, di otto pagine, nella prima delle quali si legge: « Intorno | a tre scritti « inediti | di Leonardo Pisano | pubblicati | da Baldassarre Boncompagni | secondo la lezione di un « Codice | della Biblioteca Ambrosiana di Milano | « Nota | di | Angelo Genocchi | Roma | Tipografia delle Belle Arti | Piazza Poli n.° 91 | 1855 ». Quest'opuscolo è inserito negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche compilati da Barnaba Tortolini* (2), tomo sesto, pag. 115–120.

8. Un opuscolo di sei pagine, in 8.°, nella prima delle quali (lin. 1–6) si legge: « *Sur un* « *problème traité par Léonard de Pise dans* « *son* | Flos, *et relatif à une équation de troisiè*« *me degré.* | *Extrait d'une Lettre adressée par* « M. LEBESGUE | *Professeur à la Faculté de Bor-*

(1) Sulla coperta del suddetto fascicolo si legge: « Rendiconto « della Società Reale Borbonica, Accademia delle Scienze Anno IV, « 1855. — Bimestri di Gennajo e Febbraio, Marzo e Aprile, « Maggio e Giugno; Napoli Stabilimento Tipografico di Gaetano « Nobile *Vicoletto Salata a' Ventaglieri n.* 14, 1855 ». Il terzo di questi tre bimestri che contiene l'articolo suddetto, è contenuto nelle pagine 45.ª (non numerata) –65 del fascicolo sopraccitato.

(2) Vedi sopra, pag. VI, lin. 17–28, nota (1).

« *deaux* | *à* M. BALTHASAR BONCOMPAGNI. | (Extrait « des *Annali di scienze matematiche e fisiche*; « tome VI, avril 1855) ». Quest'opuscolo è inserito negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, compilati da Barnaba Tortolini, ec.*, tomo sesto, pag. 155–160.

9. Un'opera di 126 pagine, in 8.°, nella prima delle quali si legge: « Sopra | tre scritti inediti | di Leo- « nardo Pisano | pubblicati | da Baldassarre Bon- « compagni | Note analitiche | di Angelo Genoc- « chi. | Roma | Tipografia delle Belle Arti | 1855 ». Quest'opuscolo è inserito nel tomo sesto degli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, compilati da Barnaba Tortolini ec.*, pag. 161–185, 218–251, 273–320 e 345–362.

10. Un opuscolo di 39 pagine, in 8.°, nella prima delle quali si legge: « Intorno | ad alcuni pro- « blemi | trattati da Leonardo Pisano | nel suo | *Li-* « *ber Quadratorum* | Brani di lettere | dirette | dal « Sig. | Angelo Genocchi | a | D. Baldassarre Bon- « compagni | Roma | Tipografia delle Belle Arti | « Piazza Poli, n.° 91. | 1855 ». Quest'opuscolo è inserito negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, compilati da Barnaba Tortolini ec.*, tomo sesto, pag. 186–209, 251–259.

11. Un opuscolo di 22 pagine, in 8.°, nella prima delle quali si legge: « Intorno | alla risoluzio- « ne | delle | equazioni simultanee | $x^2 + h = y^2$, « $x^2 - h = z^2$. | Nota | di Baldassarre Boncompa- « gni | Socio ordinario dell'Accademia Pontificia | « de' Nuovi Lincei. | *Estratta dagli Annali di* « *Scienze* | *Matematiche e Fisiche pubblicati in* « *Roma* | *Aprile* 1855 | Roma | Tipografia delle « Belle Arti | 1855 | Piazza Poli, n.° 91 ». Questa Nota trovasi stampata negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, compilati da Barnaba Tortolini ec.*, *Aprile* 1855, tomo sesto, pag. 135–154.

12. Un opuscolo di 45 pagine, in 4.°, nella prima delle quali si legge: « Alcune ricerche | re- « lative | alla teorica dei numeri | Memoria | del | « Professor Paolo Volpicelli | Estratta dagli Atti « dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei | An- « no VI Sessione I.ª del 19 Decembre 1852. | Roma | « Tipografia delle Belle Arti | 1855 ». Quest'opuscolo trovasi inserito nella raccolta intitolata: « Atti del- « l'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei pubblicati « conforme alla Decisione Accademica del 22 di- « cembre 1850 e compilati dal Segretario. Roma, « 1851–1855, Tipografia delle Belle Arti, Piazza « Poli, n.° 91 », cinque tomi, in 4.°, cioè tomi, I, IV, V, VI e VII; tomo VI — Anno VI (1852–1853),

pag. 77-119. In una nota a questa memoria si legge (1): « Questa memoria è la riunione di due note, « la prima delle quali riguarda le applicazioni delle « progressioni, tanto aritmetiche quanto geometri- « che, a dimostrare alcuni teoremi sui numeri, e « contiene l'enunciato di una proprietà, che si ri- « ferisce alla teorica generale dell'equazioni alge- « briche determinate: la seconda concerne alcuni « brani dell'opera di Leonardo pisano, intitolata « *Liber quadratorum*, ed altre simili ricerche. La « prima delle note stesse fu comunicata nella ses- « sione accademica del 14 Gennaro, e la seconda « in quella del 6 maggio 1855 ». La memoria menzionata in questo passo della suddetta nota è quella medesima, di cui si è parlato di sopra nelle linee 14-16 della pag. XIX. Questa memoria ha la data seguente: « Roma 6 giugno 1855 » (2).

13. Un opuscolo inserito nella raccolta intitolata: « La Civiltà Cattolica. Napoli-Roma 1850-1856 »,

(1) *Volpicelli*, *Alcune ricerche relative alla teorica dei numeri*, pag. 3, nota (*). — *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, *pubblicati conforme alla Decisione Accademica del* 22 *dicembre* 1850, *e compilati dal Segretario*, *Tomo VI*, *Anno VI* (1852-1853), pag. 77, nota *.

(2) *Volpicelli*, *Alcune ricerche relative alla teorica dei numeri*, pag. 45. — *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, *Tomo VI Anno VI* (1852-1853), pag. 119.

sei anni, 26 volumi, in 8.°, *Seconda Serie. Roma coi Tipi della Civiltà Cattolica*, Via del Quirinale num. 56, 1853–1855, 12 volumi, in 8.°, volume undecimo, num. 56, 18 Agosto 1855, RIVISTA DELLA STAMPA ITALIANA, II, (pag. 456–470). Quest'articolo nella pagina 456 del medesimo volume undecimo (lin. 5–12) è intitolato:

« *Tre Scritti inediti di* LEONARDO PISANO *pub-* « *blicati da* BALDASSARRE | BONCOMPAGNI *secondo la* « *lezione di un codice della Biblioteca Am-* | *brosiana* « *di Milano.* — Firenze. Tipografia Galileiana di « M. Cel- | lini e C. 1854.

« *Intorno ad alcune opere di* LEONARDO PISA- « NO *matematico del secolo* | *decimoterzo Notizie* « *raccolte da* BALDASSARRE BONCOMPAGNI *socio* | *ordi-* « *nario dell'Accademia pontificia de' nuovi Lincei.* – « Roma. | Tipografia delle Belle Arti. 1854 ».

Mi è stato assicurato che questo articolo relativo alla prima edizione descritta di sopra (pagina 5.ª non numerata, lin. 8–14 — pag. VI, lin. 1–13) ed al numero 1 della presente nota, sia opera del P. Giuseppe Brunengo della Compagnia di Gesù.

14. Un opuscolo di quattro pagine, in 8.°, numerate tutte, salvo la prima, coi numeri 2–4, la prima delle quali contiene uno scritto, che nelle prime due linee della pagina medesima è intitolato: « DUE TEO-

« REMI | spettanti al Calcolo integrale », e le tre altre contengono uno scritto che, nelle prime due linee della pagina numerata 2 di quest'opuscolo, è intitolato: « Cenno d'alcune speculazioni algebri- « che di Leonardo Pi-|sano e del Cardano ». Quest'opuscolo firmato (pag. 4, lin. 20): « A. GENOCCHI », è inserito in una raccolta intitolata: « Il Cimento Rivista di scienze, lettere ed arti. Torino « Tip. Scolastica di Sebastiano Franco e figli e « Comp. 1851–1856 », quattro anni, volumi 7, in 8.°, *Anno III. — Serie* 3.ª, vol. VI, pag. 607–610. Nell'ultima linea della pagina numerata 4 di quest'opuscolo si legge: « *Estratto* dal CIMENTO, « Vol. VI. — *Fasc. VII.* »

15. Un opuscolo di 12 pagine, in 8.°, nella prima delle quali si legge: « Storia dell'Algebra | — « Dei congrui di Leonardo Pisano | per | Angelo Ge- « nocchi | *Estratto dal* CIMENTO, vol. VI. – *Fasc.* VIII. « | Torino | Tip. Scolastica di Sebastiano Franco « e figli e Comp. | 1855 ». Quest'opuscolo trovasi nella sopraccitata raccolta intitolata: « Il Ci- « mento Rivista di scienze, lettere ed arti ». *Anno III. – Serie* 3.ª *volume.* VI, pag. 670–679.

16. Un articolo inserito nella raccolta intitolata: « La | Enciclopedia | contemporanea | formante « un Repertorio universale | di fatti e notizie

« importanti | in istoria, scienze, lettere, ed « arti, | commercio, e industria, | e bibliografia « italiana e straniera. | Compilata | da G. An- « gelo Gabrielli. | Fano | Tipografia di Giovanni « Lana | 1855–1856 », tre volumi, in 8.°, volume secondo, pag. 486–489. Quest'articolo relativo al n.° 1 della presente nota è intitolato nel medesimo volume secondo, pag. 486, lin. 20–22, così: « In- « torno ad alcune opere di Leonardo Pisano ma- « te | matico del secolo XIII. Notizie raccolte da « Baldassarre | Boncompagni. — *Roma Tipografia* « *delle Belle Arti* ». L'articolo medesimo è firmato a pag. 489, lin. 21, del medesimo volume secondo, così: « Prof. Agostino Avoni ».

17. Un articolo inserito nella raccolta intitolata: « Archiv | der Mathematik und Physik | mit beson- « derer Rücksicht | auf die Bedürfnisse der Lehrer « an höhern | Unterrichtsanstalten. | Herausgege- « ben | von | Johann August Grunert, | Professor zu « Greifswald. | Greifswald. | 1841–1856 », 26 volumi, in 8.°, *Fünfundzwanzigster Theil* (volume XXV), quarta numerazione di pagine, *Literarischer Bericht XCIX. Geschichte der Mathematik und Physik.*, pag. 1–4). Quest'articolo relativo al n.° 1 della presente nota è intitolato nel medesimo volume XXV, così: « Intorno ad alcune

« opere di Leonardo Pisano, Ma-|thematico de (*sic*)
« secolo decimoterzo. Notizie raccolte da | Baldas-
« sarre Boncompagni, Socio ordinario dell'Acca-|
« demia Pontificia de'nuovi Lincei. Roma. Tipo-
« grafia|delle belle arti. 1854. 8.° »

18. Un opuscolo di 44 pagine, nella prima delle quali si legge: « Sur Léonard Bonacci de Pise | et « sur trois écrits de cet auteur | publiés par Bal-« thasar Boncompagni | Article de M. O. Terquem | « Officier de l'Université, Docteur ès sciences, | « Professeur aux Ecoles Impériales d'Artillérie, | Offi-« cier de la Légion d'honneur. | (Extrait des *An-« nali di scienze Matematiche*, tome septième, | ca-« hiers *Marzo ed Aprile* 1856.) | Rome | Impri-« merie des Beaux-Arts | 1856 ». Quest'opuscolo trovasi stampato nella raccolta intitolata: « Nouvel-« les Annales | de | Mathématiques. | Journal des « candidats | aux Ecoles Polytechnique et Nor-« male, | Rédigé par MM. Terquem, | Officier de « l'Université, Docteur ès sciences, Professeur « aux Ecoles Impériales d'Artillerie; | et | Ge-« rono, | Professeur de Mathématiques. | Paris | « 1842-1856. Carilian-Goeury et V^or Dalmont, « Editeurs, | libraires des corps royaux des ponts « et chaussées et des mines, Quai des Augustins, « N°s 39 et 41, (tomes 1-7.) Mallet-Bachelier, Im-

« primeur-libraire | du Bureau des Longitudes, de « l'Ecole Polytechnique, etc., | Quai des Augustins, « n.° 55 (tomes 8-15) », 15 tomi, in 8.°, (*tome quatorzième*, *Bulletin de Bibliographie*, *d'Histoire et de Biographie mathématiques*, pag. 173-179; *tome quinzième*, seconda numerazione di pagine, *Bulletin de Bibliographie*, pag. 1-71). L'articolo medesimo fu poscia ristampato negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, *compilati da Barnaba Tortolini* ec. (tomo séttimo, pag. 106-147).

19. Un articolo che trovasi nel Giornale intitolato: « L'ARTE Giornale Letterario, Artistico, « Teatrale », (Anno V. n.° 85, Mercoledì 24 Ottobre 1855, pag. 337.ª non numerata, prima del medesimo n.° 85, colonne 1-3). Quest'articolo, che nella linea 41 della terza di queste tre colonne è firmato « G. Gargani », trovasi intitolato nelle linee 26-32 della prima di tali colonne così: « Bibliografia » *Intorno ad alcune* « *opere di* Leonardo Pisano *mate-* | *matico del secolo* « *decimoterzo. Notizie raccolte da* Bal- | dassarre « Boncompagni, *Socio ordinario dell'Ac-* | *cademia*

(1) Il suddetto Giornale intitolato *L'Arte* è composto di sei *Anni* stampati tutti in Firenze.

« *Pontificia de' Nuovi Lincei; Roma. Tipografia* | « *delle Belle Arti* » 1854. *Pag.* 400 *num. e I–VII* « *in* | *grande ottavo con fac-simile* ».

20. Un articolo che trovasi nel Giornale intitolato: « L'INDICATORE | Scienze. – Lettere. – Arti. – Teatri. « (Anno II. –. n.° 40. Firenze, 31 Maggio 1856, pag. 3, col. 1, lin. 26–88. Rivista Bibliografica; Anno II. — n.° 41. Firenze, 7 Giugno 1856, pag. 1 non numerata, col. 3, lin. 56 — pag. 2, col. 1, lin. 1–60). La parte di quest'articolo, inserita nel primo di questi due numeri, è firmata nel numero medesimo (pag. 3, col. 1, lin. 88) « A. A. ». La parte dell'articolo medesimo, stampata nel precitato n.° 41, è firmata in questo numero (pag. 2, col. 1, lin. 61): *Professo-* « *re* A. Avoni ». Questo articolo, nelle linee 26–29 della col. 1 della pag. 3 del suddetto n.° 40, è intitolato: « RIVISTA BIBLIOGRAFICA | *Intorno ad alcune opere di* Leonardo Pisano, *matema-* | *tico del Secolo XIII, notizie raccolte da* Baldassarre | Boncompagni. – *Roma*, *Tip. delle Belle Arti* ».

21. Una lettera che trovasi nel Giornale intitolato: « GAZZETTA PROVINCIALE DI PAVIA » Anno 20, Sabato 14 Giugno 1856 n.° 24, pag. 94, col. 3, lin. 1 — pag. 95, col. 1, linea ultima. Questa lettera

intitolala (1): « ALL' ECCELLENTISSIMO SIGNOR DOTTO-« RE | GIAMBATTISTA VALCASALI | A Bologna », ha la seguente data e firma (2): « Da Pavia « addì 10 Giugno 1856. | *Del tuo affezionatissimo* | « C. GIANNINI ». Un paragrafo di questa lettera è relativo alla prima edizione descritta di sopra degli opuscoli suddetti di Leonardo Pisano (3).

Roma, 1.° Agosto 1856.

BALDASSARRE BONCOMPAGNI.

(1) *Gazzetta Provinciale di Pavia*, *Anno* 20, N.° 24, pag. 94, col. 3, lin. 3-5.

(2) *Gazzetta Provinciale di Pavia*, Anno 20, N.° 24, pag. 95, col. 1, lin. 69-71.

(3) *Gazzetta Provinciale di Pavia*, Anno, 20, N.° 24, pag. 94, col. 3, lin. 39-52.

Incipit *flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam uel ad utrumque pertinentium.*

Intellecto, beate pater et domine uenerande. R. dei gratia sce̅. Ma̅r. In Cosmidin. diac. Card. dignissime, quod meorum operum copiam non preceptiue saltim, quod uos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras uestre sanctitatis dignati; nihilominus tamen petitionem ipsam reuerenter suscipiens in mandatis, non solum parere uoto uestro sattegi deuotius in hac parte, verum etiam de quarumdam solutionibus questionum á quibusdam philosophis serenissimi domini mei Cęsaris, et alijs per tempora mihi oppositarum, et plurium que subtilius quam in libro maiori de numero, quem composui, sunt solute, ac de multis quas ipse met ad inuenj; ex diffusa quidem multitudine compilans hunc libellum ad laudem et gloriam nominis uestri compositum florem ideo uolui titulari, quia illa nobis florida Clericorum elegantia radiantibus dictaui, atque etiam quia ibi nonnulle sunt floride quamquam nodose apposite

questiones, tanque geometrice quam arismetrice indagatione uigili sic probabiliter enodate, ut ne dum non solum floreant inse ipsis, immo et quod per eas, uelut ex radicibus plantule emergunt innumere questiones, quibus interdum uacare sidignabiminj, poteritis si placebit inter curas et occupationes uestras ab octiositate illa, que uirtutum est nouerca, uacando sub exercitatione ingenij, solatia etiam nec sterilia sed officiosa captare. Si autem hoc nouero á uestrę clementię benignitate acceptari, quicquid amone subtilitatis uel utilitatis ulterius adinuenero, eidem operi, ut uestram merear gratiam adipisci, obnoxius cumulabo, eadem et me ipsum correctioni dominationis uestre affectuosius supponendo.

Explicit prologus incipit tractatus eiusdem.

Cvm coram maiestate uestra, gloriosissime princeps Frederice, magister Iohannes panormitanus, phylosophus uester, pisis mecum multa de numeris contulisset, interque duas questiones, que non minus ad geometriam quam ad numerum pertinent, proposuit; Quarum prima fuit ut inueniretur quadratus numerus aliquis, cui addito uel diminuto
fol 1 verso quinario | numero, egrediatur quadratus numerus, quem quadratum numerum, vt eidem magistro Iohanni retuli, inueni esse hunc numerum, vndecim et duas tertias et centesimam quadragesimam quartam unius. Cuius numeri radix est ternarius et quarta et vi^a^. unius. Cui quadrato numero si addantur quinque prouenient. xvi. et due tertie et una centesima quadragesima quarta, qui numerus est quadratus. Cuius radix est quatuor et una duodecima. Item

si auferantur. v. ab eodem quadrato numero, remanebunt vi. et due tertie et una centesima quadragesima quarta, qui numerus etiam quadratus est. Cuius radix est duo et tertia et quarta unius. Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predictę questionis solutio, inueni ipsam habere originem ex multis accidentibus, que accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros; quare hinc sumens materiam libellum incepi componere ad uestre maiestatis celsitudinis gloriam, quem libellum quadratorum intitulaui, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predictę, et multarum aliarum questionum solutiones, quem habere poterit uestra immensitas, si celsitudini uestre placuerit. quadratorum liber.

Altera uero questio á predicto magistro Iohanne proposita fuit vt inueniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent uiginti; super hoc meditando putaui huius questionis solutionem egredi ex his que continentur in. x.° lib.° Euclidis, et ob hoc super ipso. x.° Euclidis accuratius studui, adeo quod sinteoręmata ipsius memorie commendaui, et ipsarum intellectum comprehendi. Et quia difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum x^m librum glosare incepi, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur; qui liber. x.ᵉ tractat de diuersitatibus xv. linearum rectarum, quarum. xv. linearum due uocantur rite seu ratiocinate. L.ᵉ XV.

Relique. xiii. dicuntur aloge siue inratiocinate. Ex his duobus ritis, una dicitur riti seu ratiocinata longitudine et potentia. Alia uero potentia solum. Per primam ex his duabus intelligitur numerus qui potest numerari, vt unus: duo: tres: et ceteri, uel partes unita-

tis, ut medietas: tertia: et quarta: et cetere fractiones, qui
fol. 2 recto omnes sunt radices | quadratorum numerorum. Per secundam intelliguntur radices numerorum ratiocinatorum non quadratorum, vnde potentia earum radicum numeratur, et ipse radices numerari non possunt: Et ideo uocantur nu-
XIII li.e meri surdi. Et ex XIIJ.cim predictis lineis prima est simplex, que uocatur media, per quam intelligitur radix radicis numeri non quadrati. Et ex reliquis, sex sunt radices numerorum binomiorum, hoc est duorum nominum. Relique sunt radices recisorum. Ex duobus quidem nominibus sunt numeri compositi ex numero et radice, uel ex duabus radicibus, que compositio fit sex modis. Recisus quidem numerus dicitur residuum, quod est inter numerum et radicem, uel inter duas radices, quod etiam fit sex alijs modis, ut Euclides dicit.

Et cum studiose super hos quindecim numeros, et super eorum diuersitates cogitarem, inueni nullum ipsorum congruere posse uni ex. x. radicibus supradictis, que cum duobus quadratis et cubo sint. xx. ut in sequentibus geometrice demonstratur.

ADIACeat quidem linea *a b* (1) pro una ex dictis decem radicibus, cui applicetur superficies recti angula *b d* latitudinem faciens rectam *d g*, que sit. x. Et recte quidem *b g* aplicetur superficies rectiangula *e g* equalis cubo, qui fit a numero *a b*.

Rursus recte *e z* aplicetur palilogramum (*sic*) orthogonium *i z* equale duobus quadratis, qui fiunt a numero *a b*; erit ergo tota *a t* superficies rectiangula et equalis. xx., sunt enim anguli *a b g* et *g b e* recti. Quare indirecto est linea *b e*

(1) Vedi Fig. 1.

linee *b a*. Similiter demonstrabitur indirecto esse linea *e i* linee *e b*. Quare tota *a i* linea recta est et continua. Similiter et linea *d t* est recta, paralilogramum ergo est superficies *a t*, et est orthogonium, cum omnes anguli ipsius sint recti. Et est. x. una queque linearum *a d*, *b g*, *e z*, *i t*. Verum quoniam linea *a b* est una ex suprascriptis. x. radicibus, erit superficies *a g* equalis. x radicibus predictis, cum linea *b g* sit. x. Siquidem et superficies *b z* est equalis cubo, qui fit á radice *a b*, et superficies itaque *e t* est equalis duobus quadratis, quorum unusquisque sit ab eadem radice *a b*. Ergo tota superficies *a t* continetur ex uno cubo et ex duobus quadratis et x radicibus, qui omnes coniuncti esse. xx. proponuntur. Quare superficies *a t* est. xx. Et quoniam unumquodque laterum *a d* et *i t* est. x. erit unuquodque (*sic*) laterum *a i* et *d t* duo. Cum superficies *a t* sit. xx. Dico primum itaque radicem *a b* esse non posse ex numeris | ratiocinatis neque ex radicibus ratiocinatorum, uel ex radicibus radicum ratiocinatorum, seu ex sex numeris coniunctis, aut ex sex numeris residuis suprascriptis, neque ex radicibus coniunctorum uel recisorum. Et si possibile est, esto primum radix *a b* ex numeris, qui sunt ratiocinati longitudine et potentia. Et quoniam tota *a i* est duo, et *a b* minor est quam *a i*, ergo radix *a b* minus est binario. Et quia positum est ipsam *a b* esse ex numeris ratiocinatis, aut enim est integer numerus *a b*, aut fractus, esto prius integer si est possibile. Et quoniam nullus numerus integer est minor binario nisi unitas, erit ergo radix *a b* unum. Quare superficies *b d* erit. x. et cubus, qui fit ab unitate *a b*, scilicet superficies *d z*, erit unum. Item et duo quadrati, qui sunt ab unitate *a b*, scilicet superficies *i z* erit duo,

fol. 2 verso

quare tota superficies *a t* erit. xiii. tantum; sed superficies *a t* est. xx. Non ergo radix *a b* est numerus integer.

Similiter ostendetur quod numerus *a b* non est fractus. Si fractus enim est numerus *a b*, cum cubicatus (*sic*) egrediuntur ex illa cubicatione fractiones, et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis, et cum multiplicatur in se numerus *a b*, si est fractus, egreditur ex duplo multiplicationis eius fractio fractionis, uel fractiones fractionis. Et cum multiplicatur idem numerus ruptus, scilicet *a b* in *b g*, scilicet in. x., egredietur quandoque fractio uel fractiones tantum, et quandoque egredietur numerus integer ex ipsa multiplicatione. Cum itaque multiplicatur *a b* in *b g* prouenit numerus *b d*. Et cum cubicatur numerus *a b* prouenit numerus *b z*. Et cum duplicatur multiplicatio numeri *a b* inse prouenit numerus *e t*. Ergo si fractus est numerus *a b*, occurrit quandoque in numero *b d* fractio aliqua, uel fractiones tantum, et in numero quidem *b z* occurrunt fractiones, et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis, et in numero quoque *e t* occurrunt fractiones et fractiones fractionis tantum. Vnde si coniungantur fraetiones que sunt in numeris *b d* et *b z* et *z i*, nunquam ex ipsorum coniunctione poterit numerus integer procreari. Quare si fractus est numerus *a b*, fractus erit numerus *d i*, qui est. xx. quod est inconueniens Et si numerus *b d* est sine fractione, reliquus *b t* erit similiter sine fractione, cum totus numerus *a i* sit. xx., quod non proueniet cum in numero *e t* sint fractiones, et fractiones fractionis, et in numero *b z* sint fractiones, et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis. Non ergo fractus est numerus *a b*, neque integer.

Ostendam rursus impossibile esse quod numerus *a b* (1) *fol. 3 recto*
sit radix alicuius numeri ratiocinati; ducatur quidem *a b* in se, et proueniat numerus *b k*, et ex *b k* in *b a* prouenit superficies rectiangula *a k*, que superficies est equalis cubo, qui fit a numero *a b*. Quare superficies *k a* equalis est superficiei *b z*. Equalium uero et unum uni equalem habentium angulum parallilogramorum contrarie potiuntur latera, que circa equales angulos subtenduntur, ut in. VI.to Euclidis reperitur. Ergo est sicut *g b* ad *b k*, ita *a b* ad *b c*. Et cum quatuor quidem quantitates proportionales sunt, fueritque sicut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, et prima fuerit secunde commensurabilis, et tertia quarte commensurabilis erit, ut in. x.° Euclidis reperitur. Est enim recta *a b* radix numeri. Quare quadratus qui fit ab ea, scilicet numerus *b k*, est ratiocinatus, et *g b* est decem, qui est ratiocinatus, ergo primus numerus *g b* commensurabilis est secundo *b k*. Quare et *a b* numerus numero *b e* commensurabilis est. Est enim *a b* radix numeri ratiocinati. Quare et *b e* est radix numeri ratiocinati. Et quia *a b* commensurabilis est *b e*, erit ergo *a b* toti *a e* commensurabilis. Quare *a e* est radix numeri ratiocinati et est commensurabilis potentia solum toti *a i* numero, scilicet binario. Quare si a binario *a i* auferatur radix *a e*, qui sunt potentia solum ratiocinati, remanebit *e i* abscisio, siue recisum, quod inratiocinatum esse ab Euclide in. x.° demonstratur. Sed quia ex ductu *a b* inse prouenit numerus ratiocinatus, scilicet dimidium superficiei *e t*, erit ergo tota superficies *e t* ratiocinata, cuius unum

(1) Vedi Fig. 2.

latus *e z* est ratiocinatum, quod est decem. Quare latus *e i* est ratiocinatum, quod superius ostensum est esse in ratiocinatum. Vnde impossibile est quod radix *a b* sit radix numeri ratiocinati, ut predixi.

Aliter, quia linea *a e* est radix numeri ratiocinati, ut ostensum est, et linea *e z* est numerus ratiocinatus, erit superficies *d e* radix numeri, et superficies *e t* est numerus ratiocinatus. Quare tota superficies *d i* constat ex numero in ratiocinato et ratiocinato, quod est inconueniens cum superficies *d i* sit xx. Amplius dico quod radix *a b* non est radix radicis alicuius numeri;, sed si possibile est, esto *a b* (1) radix radicis alicuius ratiocinati, et ex
fol. 3 verso ductu item *a b* inse | proueniat *b k*, et ex *a b* in *b k* prouenit superficies *k a*, que est equalis superficiei *b z*, hoc est cubo, qui fit a radice *a b*. Quare est sicut *g b* ad *b k*, ita et *a b* ad *b e*. Et quoniam *a b* est radix radicis numeri ratiocinati, erit ergo *b k* radix radicis numeri ratiocinati. Quare *g b* et *b k* numeri commensurabiles sunt potentia solum, et *a b* et *b e* commensurabiles sunt similiter potentia tantum. Media enim est linea *a b*, hoc est radix radicis numeri ratiocinati. Media ergo erit et linea *b e*, et incommensurabilis linee *b a* longitudine. Quare tota *a e* sit ex duabus medijs potentia solum commensurabilibus, ergo *a e* est una ex duabus bimedialibus lineis, scilicet radix unius ex compositis numeris supradictis. Item ex ductu *a b* inse prouenit dimidium superficiei *e t*, scilicet superficies *l i*, que superficies aplicata est linee ratiocinate *l e*, que est quinque.

(1) Vedi Fig. 3.

Et quia quod á media secundum ritim et ductum latitudinem facit ritim et incommensurabilem ei cui adiacet longitudine. Riti (1) ergo est recta *e i*, et incommensurabilis recte *l e* longitudine, ergo radix numeri ratiocinati est linea *e i*, et est incommensurabilis linee *a i* longitudine, potentia enim solum sunt commensurabiles. Quare reliquum *a e* recisum est, hoc est abscisio. Nulla enim abscisio est binomia, ut in eodem x° reperitur. Quare cum superius ostensa sit linea *a e* esse bimedialis, que modo inuencta est abscisio, et quia nullum recisum bimediale, constat lineam *a b* non posse esse radicem radicis numeri ratiocinati, quod opportebat ostendere.

Ostendam rursus unam ex predictis radicibus, scilicet lineam *a b* esse non posse aliquam ex lineis compositis, uel depositis, nec ex earum radicibus. Sed antequam ad huius rei probationem perueniam, uolo proprietates ipsarum linearum denotare. Per primam quidem ex sex lineis compositis Pmª
intelligitur compositum ex numero et radice, cuius numeri potentia superhabundat potentiam radicis secundum quantitatem alicuius numeri quadrati, ut si componatur quaternarius cum radice septenarij, potentia quaternarij est xvi., et potentia radicis de vii est vii, et sic potentia quaternarij addit viiii, super potentia radicis de vii, qui nouenarius quadratus est, et eius radix est iii. Per secundam uero 2.ª
intelligitur compositio | radicis et numeri, cuius radicis fol. 4 recto
quadratus potest super quadratum ipsius numeri secundum quantitatem alicuius numeri habentis proportionem ad quadratum ipsius radicis, eam quam habet quadratus nu-

(1) Sopra la parola *Riti*, nel codice Ambrosiano *E*. 75 *Parte Superiore*, trovasi in carattere più piccolo *i. rōcinata*.

merus ad quadratum numerum, ut si maius nomen sit radix de. cxii, minus sit. vii., tunc residuum quod est á quadrato septenarij, scilicet á xl. viiii. in c. xii., idest lxiii., habet proportionem ad. cxii., sicut quadratus numerus. viiii. ad quadratum numerum. xvi. Per tertiam quoque intelligitur compositio duarum radicum diuersorum numerorum non habentium proportionem adinuicem sicut quadratus numerus ad quadratum numerum, et maius nomen potest plus minore, quod a commensurabili sibi longitudine, hoc est quod differentia que est inter utrumque quadratum ipsarum radicum habeat proportionem ad quadratum maioris radicis, sicuti quadratus numerus ad quadratum numerum; ut si primum nomen fuerit radix de. xviii., secundum de. x., differentia que est a. xviii. usque in. x., scilicet viii., habet proportionem ad xviii. eam quam habet quadratus numerus. iiii. ad quadratum numerum. viiii.

(the margin number "3." stands beside the line beginning "ad quadratum numerum. xvi.")

4. Per quartam siquidem intelligitur compositum ex numero et radice, qui numerus potest plus ipsa radice, eo quod ab incommensurabili sibi longitudine, hoc est quod differentia, que est inter quadratum ipsius numeri et quadratum radicis, non sit quadratus numerus, ut accidit de quaternario et radi-
5. ce sexnarij. Per quintam autem intelligitur compositum ex radice alicuius numeri non quadrati, et ex aliquo numero, in quo quadratus radicis potest plus quadrato illius numeri secundum quantitatem numeri non habentis proportionem ad quadratum radicis sicuti quadratus numerus ad quadratum numerum, ut compositum ex radice sexnarij et ex binario.
vi. Per sextam namque intelligitur compositum ex duabus radicibus diuersis, quarum maior potest plus minore secundum quantitatem numeri non habentis proportionem ad quadra-

tum maioris radicis, sicuti quadratus numerus ad quadratum
numerum, ut est compositum ex radice octonarij et radi-
ce quinarij. Horum quippe sex binomiorum radices haben-
tur ex ordine sic. Primi quidem binomij radix est aliqua R.x p.i Bino.ii
ex predictis sex lineis binomijs, quia cum multiplicatur
numerus binomialis inse, nimirum ex ipsa multiplicatione
primum binomium surgit. Radix quippe secundi binomij
Bime.lis p.a dicitur bimedialis prima, que componitur ex duabus ra- 2.i B. R.x
dicibus radicis potentia solum commensurabilibus | nume- fol. 4 verso
rum continentibus, hoc est cum multiplicatur una earum
in aliam prouenit inde numerus ratiocinatus, ut si prima
fuerit radix radicis de. viii. et alia radix radicis duorum,
prouenit ex earum multiplicatione radix radicis de. xvi.,
scilicet ii. Tertij autem binomij radix est linea que dicitur Bi. 3.i R.x
Bime.lis 2.a bimedialis secunda, que componitur ex duabus radici-
bus radicis potentia solum commensurabilibus medium,
scilicet radicem numeri, continentibus, hoc est cum mul-
tiplicatur una earum in aliam, id quod prouenit est radix
numeri non quadrati, ut si prima fuerit radix radicis. xii.
Secunda radix radicis trium, ex quarum multiplicatione
surgit in radicem sexnarij, scilicet in radicem radicis
de. xxxvi. Quarti quoque binomij radix est linea que Bi. 4.i R.x
dicitur maior, que componitur ex duabus lineis potentia L.a Maior.
incommensurabilibus, quarum quadrati insimul coniuncti fa-
ciunt numerum ratiocinatum, et ex multiplicatione unius
in aliam prouenit numerus inratiocinatus, scilicet radix
numeri. Vt si prima fuerit radix de. iiii., et ex radice
de. xiii., et alia fuerit radix de. iiii., minus radice de. xiii.
Quinti siquidem binomij radix est linea que dicitur riton
et medium potens, hoc est super ratiocinatum et inratio-
cinatum numerum, que componitur ex duabus lineis po-

tentia incommensurabilibus, quarum quadrati insimul iuncti faciunt radicem numeri, et ex multiplicatione unius in aliam prouenit numerus ratiocinatus. Vt si prima fuerit radix radicis de. xx. et ex duobus, et alia fuerit radix de. xx. minus. ii. Sexti autem binomij radix est linea que dicitur potens super duos inratiocinatos numeros, que componitur ex duabus lineis potentia incommensurabilibus, quarum quadrati insimul iuncti faciunt numerum inratiocinatum, et ex multiplicatione unius in aliam surgit similiter numerus inratiocinatus, vt si prima fuerit radix radicis de xx. iiii. et de radice de vii., et alia fiat radix radicis de xxiiii. minus radice de. vii., hoc est cum multiplicatur prima ipsarum duarum linearum inse prouenit radix de xxiiii. et radix de. vii., et cum multiplicatur secunda inse prouenit radix de xxiiii. minus radice de. vii.

Similiter. vi. numeri, qui dicuntur recisi seu apothami imitantur seriem sex binomiorum suprascriptorum ordinate. Nam primum recisum constat ex numero minus radice. Secundum ex radice minus numero. Tertium ex radice minus radice. Quartum constat ex nominibus pri- *fol. 5 recto* mi. | Quintum ex nominibus secundi. Sextum ex nominibus tertij. Sed in tribus prioribus recisis maiora nomina possunt plus minoribus eo quod a commensurabili ip̄is (*sic*) longitudine in reliquis, quod ab incommensurabilibus.

Nam radix primi recisi est aliquod suprascriptorum recisorum. Radix uero secundi est recisum bimedialis prime, hoc est radix radicis minus radice radicis, ex quarum multiplicatione prouenit numerus ratiocinatus.

Tertij autem radix est recisum bimedialis secundi, hoc est radix radicis minus radice radicis, ex quarum multiplicatione prouenit numerus inratiocinatus. Quarti quoque re-

cisi radix est que constat ex residuo quod est inter duas lineas, que sunt potentia incommensurabiles, ex quibus componitur linea maior. Quinti itaque recisi radix est que constat ex residuo quod est inter duas lineas potentia incommensurabiles, ex quibus componitur linea potens super ratiocinatum et inratiocinatum.

Sexti namque recisi radix est que constat ex residuo quod est inter duas lineas potentia incommensurabiles, ex quibus componitur linea potens super inratiocinatum (*sic*) et inratiocinatum. his omnibus terminatis, dico nullum ex predictis numeris posse congrui uni ex. x. radicibus suprascriptis. Ad que demonstranda reiterabo figuram. Et si possibile est numerus *a b* (1), qui est una ex. x. radicibus suprascriptis, sit unum ex. IIII.or binomijs qui componuntur ex numero ratiocinato et radice numeri non quadrati, et diuidatur numerus *a b* in nomina, et sit *b c* numerus, et *c a* sit radix numeri. Et multiplicetur *b a* inse, et proueniat *b k*, et ex *a b* in *b k* prouenit superficies *a k*, que est equalis superficiei *b z*, scilicet cubo qui fit á linea *a b*. Comuniter (*sic*) addatur superficies *d b*, erit tota superficies *d e* equalis superficiei *d k*, que superficies continetur ex numero et radice tantum, ut insequentibus demonstratur. Quoniam linea *b a* diuisa in duo in puncto *c*, erunt duo quadrati linearum *b c* et *c a*, cum duplo *b c* in *c a*, equales quadrato totius *b a*. Quadrati enim *b c* et *c a* sunt ratiocinati, cum *b c* sit numerus, et *c a* sit radix numeri ratiocinati. Quare ipsi duo quadrati sunt numerus qui fit *b f*. Ergo ex duplo *b c* in *c a* prouenit *f k*, cum *b k* proueniat ex *b a* in se, et quia ex duplo *b c* in *c a* prouenit *f k*, et *b c* est

(1) Vedi Fig. 4.

numerus. Est proportio *f k* ad *c a*, sicut numerus ad numerum. Quare commensurabilis est *f k* linee *c a*. Diuidatur itaque superficies *d k* in quatuor superficies rectiangulas *g o* et *o l* et *d o* et *o k*. Et quia *g b* et *b f* sunt numeri,
fol. 5 verso numerus est ergo tota *g f*. Est enim et linea *f o* | numerus cum sit equalis linee *b c*. Quare superficies *g o* est ratiocinata, et quia *f k* est commensurabilis linee *c a*, et linea *o p* commensurabilis est linee *c a*, cum sit equalis linee *f k*. Quare superficies *o l* est ratiocinata. Numerus ergo sunt superficies *g o* et *o l*. Rursus quia numeri sunt *n o* et *o f* et *f k*, est commensurabilis *c a*. Commensurabiles sunt superficies *d o* et *o k*. Quare superficies *d o* et *o k* constant ex radicibus sibi inuicem commensurabilibus, cum numeri sint *n o* et *o f*, et possunt congregari et reduci ad radicem unam, quia cum congregantur radices sibi inuicem commensurabiles, progreditur ex eorum congragatione (*sic*) radix numeri tantum; ergo tota superficies *d k* constat ex numero et radice, cui superficiei equalis est superficies *d e*, cum equalis sit superficies *z b* superficiei *b l*. Ergo et superficies *d e* constat ex numero et radice, similiter et superficies *e t* constat ex numero et radice cum sit duplum numeri *b k*. Quare tota superficies *d i* constat ex numero et radicibus, ergo non est numerus spatium *d i*, cum sit duarum (*sic*) uel plurium nominum. Non ergo linea *a b* est ex IIIIor binomialibus compositis ex numero ex radice. Sed si possibile est, esto rursus linea *a b* binomialis tertia uel sexta, scilicet composita ex duabus radicibus diuersis, cuius nomina sint item *b c* et *c a*. Quare ex *b a* in se prouenit binomium primum, quod est *b k*, quo ducto in *b a* prouenit spatium *b l*, quod est equale cubo *b z*. Quare tota superficies *d k*, scilicet superficies *d a*, *e g* constat ex ducto

g k in *k l*, hoc est ex ducto numero et radice in duabus radicibus diuersis. Nam *k l* equalis est linee *b c a*. Sed cum multiplicatur numerus et radix in radicibus diuersis, nimirum diuerse radices proueniunt. Quare tota superficies *d e* constat ex radicibus diuersis. Sed superficies *e i* constat ex numero et radice, scilicet ex duplo *b k*. Quare tota superficies *d i* constat ex numero et radicibus, quod est inconueniens, cum superficies *d i* sit. xx. Non ergo linea *a b* est binomia. Similiter demonstrabitur non esse aliquod ex sex recisis supradictis. Quia si recisum esset linea *a b*, eisdem demonstrationibus que demonstrata sunt in binomijs, ostendetur tota superficies *d i* constare aut ex numero minus radicibus, aut ex radicibus minus numero, ex quibus nunquam poterit. xx procreari. Dico rursus linea *b a* esse non posse ex radicibus binomiorum uel recisorum. Ostensum est | enim linea *a b* esse non posse binomium uel recisum. Quare *a b* non erit radix primi binomij uel primi recisi, cum radix primi binomij sit binomium, et radix primi recisi sit recisum. fol. 6 recto

Sed si possibile est, linea *b a* esto radix secundi binomij. Ergo erit bimedialis prima, cuius nomina sint iterum *b c* et *c a*, et proueniat iterum ex ductu *a b* inse numerus *b k*, qui est binomium secundum, cuius minus nomen sit *b h*, quod est numerus. Quare tota *g k* constat ex numero et radice. Ergo cum multiplicatur *g k* in *k l*, hoc est in *b a*, unde prouenit superficies *d e*, que est equalis superficiei *d k*, tunc multiplicatur numerus et radix in radice numeri et radicis; ex qua multiplicatione prouenit radix numeri et radicis, et fit ipsa multiplicatio sic: multiplicatur tetragonum numeri *g k* in numerum *b k* cuius multiplicationis radix

est quesitum. Ergo superficies *d e* est radix numeri et radicis, et superficies *e t* constat constat (*sic*) ex numero et radice, cum sit duplum numeri *b k*. Ergo tota superficies *d i* constat ex numero et radice, et ex radice numeri et radices (*sic*), ex quorum coniuntione nunquam poterit numerus ratiocinatus procreari.

Quare impossibile est linea *a b* linea esse radix secundi binomij, nec etiam erit quarti uel quinti binomij, quod eisdem demonstrationibus demonstratur, cum ipsa binomia constent similiter ex numero et radice.

Sed si possibile est, esto linea *a b* radix tertij uel sexti binomij, et multiplicetur *a b* inse, et proueniat *b k*, quod est compositum ex radicibus duorum diuersorum numerorum. Quare tota *g k* est trium nominum, que multiplicata in *k l*, scilicet in radice numeri *b k*, proueniet radix radicis numeri et radicum pro superficie *d e;* sed superficies *e t* constat ex duabus radicibus. Quare tota superficies *d i* est inratiocinata. Non ergo linea *a b* est radix alicuius binomij. Similiter eisdem demonstrationibus demonstrabitur, quod linea *a b* non est radix alicuius recisi, quia si esset radix secundi uel quarti aut quinti recisi, esset itaque superficies *d e* radix numeri minus radice. Vel radix radicis minus numero, scilicet quod superficies *d e* esset radix secundi uel quarti aut quinti recisi, et superficies *e t* esset numerus minus radice, uel radix minus numero, qui insimul nequaquam faciunt numerum ratiocinatum. Similiter si linea *a b* esset radix tertij uel sexti recisi, esset itaque superficies *d e* radix radicis numeri minus radice radicum. Vel esset radix radicis radicum minus radice numeri, ex qua cum superficie *e t* nullatenus posset numerus ratiocinatus prouenire. Ergo

linea *a b*, ut demonstratum est, non est aliqua ex quindecim lineis, de quibus fit mentio in. x.° euclidis ut predixi. Et quia hec questio solui non potuit in aliquo suprascriptorum, studui solutionem eius ad propinquitatem reducere. Et inueni unam ex. x. radicibus nominatis, scilicet numerum *a b*, secundum propinquitatem esse unum et minuta. XXII. et secunda. VII. et tertia. XLII. et quarta. XXXIII. et quinta. LII. et sexta. XL. fol. 6 verso

De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus.

Tres homines habebant pecuniam comunem, de qua medietas erat primi, tertia secundi. Sexta quoque pars tertii hominis, et cum eam in tutiori loco habere uoluissent, ex ea unusquisque cepit fortuitu, et cum totam ad tutiorem locum deportassent, primus ex hoc quod cepit posuit in comune medietatem, secundus tertiam, tertius sextam, et cum ex hoc quod in comune positum fuit inter se equaliter diuisissent, suam unusquisque habuit portionem; queritur quanta fuit illa pecunia, et quot unusquisque ex ea cepit. Hec itaque questio, domine serenissime imperator, in palatio uestro pisis coràm uestra maiestate à magistro Johanne panormitano mihi fuit proposita. Super cuius questionis solutionem cogitans, tres modos in soluendo ipsam inueni, quos in libro uestro, quem de numero composui, patenter inserui.

Sed cum nuper solutionem eiusdem questionis intenderem. Alium nimis pulchrum modum inueni, quem serenitati uestre pandere, de uestra benignitate confisus, curaui. Sed antequam ad eius solutionem ueniam, quedam introductoria uestre maiestati proponere dignum duxi. Videlicet cum de aliqua re medietas tollitur, illa medietas equalis est relique medietati que remanet. Similiter si de aliqua re tertia tollitur pars, ipsa tertia reliquarum duarum

tertiarum, que remanent, existit medietas. Rursus cum de aliqua re tollitur sexta pars, illa sexta pars reliquarum quinque sextarum quinta pars est. His itaque denotatis, pro qualibet tertia parte quantitatis, ab ipsis tribus hominibus posite in comuni, posui rem. Et quia proponitur unusquisque, habita ipsa re, suam habuisse portionem, ex necessario sequitur, post illud quod ipsi tres posuerunt in comuni, primo remansisse totius comunis pecunie medietatem minus ipsa re. Secundo tertiam minus eadem re. Tertio homini sextam eiusdem pecunie partem, eadem re diminuta, et quia primus posuit in comune medietatem ex toto eo quod ceperat, et illa medietas fuit equalis residuo quod ei remansit, si duplicabitur ipsius residuum, scilicet medietas dictę pecunię minus re, habebitur pro
fol. 7 recto toto eo, quod ipse primus homo cepit, tota | pecunia semel minus duabus rebus. Item quia secundus homo posuit 2.us hō
in comune tertiam partem ex hoc quod ceperit, et illa tertia pars fuit medietas eius quod ei remansit, scilicet de tertia parte totius pecunię minus re, si super ipsam tertiam partem dicte pecunie minus re addatur medietas eorum, scilicet sexta pars eiusdem pecunie minus medietate rei, egredietur pro toto hoc, quod cepit secundus homo, medietas totius pecunie, re una et dimidia diminuta. Adhuc quia tertius homo ex hoc quod cepit po- 3.us hō
suit in comune sextam partem, et illa sexta pars fuit quintum sui residui, scilicet sexte partis totius pecunie minus re, si super ipsam sextam partem minus re addatur quinta pars eorum, scilicet. xxx.a pars pecunie minus quinta parte rei, habebitur pro hoc, quod cepit tertius homo, quinta pars dictę pecunię, re una et quinta rei diminuta. Quare si addatur tota pecunia minus duabus re-

bus, quam cepit primus, cum medietate eiusdem pecunię minus una re et dimidia, quam cepit secundus, et cum quinta parte eiusdem pecunie minus una re et quinta unius rei, quam cepit tertius, habebitur pro tota eorum pecunia semel eadem pecunia et septem decime eiusdem pecunie minus IIII.^{or} rebus et septem decimis unius rei. Quare patet, quod septem. x.^{e} totius pecunię equantur quatuor rebus et septem decimis rei. Et quia est sicut una quantitas ad aliam, ita quodlibet multiplex unius ad idem multiplex alterius, erit ergo decuplum septem decimarum eiusdem pecunie, scilicet septuplum eiusdem pecunie, equale decuplo quatuor rerum et septem decimarum, scilicet rebus XLVII; vnde si ponatur rem esse. VII., tota pecunia erit. XLVII., quia septuplum ipsius pecunie, scilicet de XLVII., equabitur. XLVII. rebus, scilicet multiplicationi de XLVII. in. VII. Nam septies XLVII. sunt quantum XLVII. vicibus. VII., et quia primus cepit totam pecuniam minus duabus rebus, si de tota pecunia, que est. XLVII., auferantur 2 res, scilicet. XIIII., remanebunt xxx3 pro eo quod cepit primus homo. Item quia secundus cepit medietatem eiusdem pecunie minus una re et dimidia, si de medietate pecunie que est. XXIII $\frac{1}{2}$ (*sic*) auferatur res una et dimidia, scilicet. x $\frac{1}{2}$, remanebunt. XIII. pro eo quod cepit secundus homo. Rursus quia tertius homo cepit quintam partem dictę pecunie minus re una et quinta. Si de quinta parte totius pecunie que est $\frac{2}{5}$ 9 auferatur res et quinta pars rei, scilicet $\frac{2}{5}$ 8, remanebit 1 pro eo quod cepit tertius homo. Additis ergo 33 que | cepit primus homo cum 13 que cepit secundus et cum uno quod cepit tertius, erunt 47, ut pro tota pecunia inuentum fuit. Verbi gratia, de 33 que cepit, primus posuit in comune medietatem, scili-

s. fca eq ne

Decu.lu $\frac{7}{10}$ e

Sep.lu toti9

2. re.s 14

fol. 7 verso

cet $\frac{1}{2}$ 16, et remanserunt ei alia $\frac{1}{2}$ 16. Secundus uero homo de suis 13 que cepit posuit in comune tertiam partem, scilicet $\frac{1}{3}$ 4, et remanserunt ei $\frac{2}{3}$ 8. Tertius namque homo de uno quod cepit posuit in comune sextam partem, scilicet $\frac{1}{6}$ unius, et remanserunt ei $\frac{5}{6}$ unius. Additis ergo $\frac{1}{2}$ 16, que posuit primus homo in comuni, et $\frac{1}{3}$ 4 que posuit secundus, et $\frac{1}{6}$ unius quam posuit tertius, egredientur pro tota summa 21, quorum tertia pars, que est 7, si addantur cum $\frac{1}{2}$ 16, que remanserunt primo, et cum $\frac{2}{3}$ 8, que remanserunt secundo, et cum $\frac{5}{6}$ unius, que remanserunt tertio, habebit primus homo medietatem totius pecunie, scilicet $\frac{1}{2}$ 23. Et secundus homo habebit tertiam partem eiusdem pecunie, scilicet $\frac{2}{3}$ 15, et tertius homo habebit sextam partem eiusdem pecunie, scilicet $\frac{5}{6}$ 7. Et sic secundum hunc modum solutiones similium questionum de facili haberi possunt.

De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis.

Solvam etiam per consimilem modum utramque questionem, quas per robertinum aggiū (*sic*) domnicellum uestrum uestre maiestati transmisi, quarum prima fuit de quinque numeris, ex quibus primus cum medietate secundi et tertij et quarti facit quantum secundus cum tertia parte tertij et quartj et quinti numeri, et quantum tertius cum quarta parte quartj et quinti et primj numeri, nec non et quantum quartus cum quinta parte quintj et primj et secundi numeri, et adhuc quantum quintus numerus cum sexta parte primj et secundi et tertij numeri. Ad hoc itaque inueniendum, posui pro primo numero causam, et pro quinto rem, et pro numero, in quo subscriptis conditionibus sibi inuicem equantur numeri predicti, fortuitu posui 17. Et quia primus numerus, quem causam esse

posui, cum medietate secundi et tertij et quarti numeri surgit in 17, opportet inter secundum et quartum numerum esse duplum de 17 minus causa, scilicet 34 minus duabus causis; quia medietas de 34 minus duabus causis est 17 minus causa, que si addantur cause scilicet primo numero, faciunt 17; deinde super 34 minus duabus causis, que sunt summa secundi ed tertij et quarti numeri, addidi rem, scilicet quintum numerum, et fuerunt in summa 34 et res minus duabus causis, de quibus extraxi dragmas 17, scilicet quantitatem secundi numeri, et tertie partis tertij et quarti et quinti numeri, remanserunt pro duabus tertijs tertij et quarti et quinti numeri dragme 17, et res una minus duabus causis; et quia cum de aliqua quantitate aufertur tertia pars, illa tertia pars | est fol. 8 recto medietas residui, quare super 17 et rem minus duabus causis, addidi medietatem eorum, scilicet $\frac{1}{2}$ 8, et medietatem rei minus una causa, et fuit totum illud quod concretum est $\frac{1}{2}$ 25 et res una et dimidia minus tribus causis, et hec est summa tertij et quarti et quinti numeri, quam extraxisti ex summa secundi et tertij et quarti et quinti numeri, scilicet de dragmis 34 et re una minus duabus causis; et fuit illud quod remansit pro quantitate secundi numeri dragme $\frac{1}{2}$ 8 et causa una minus medietate rei. Deinde cum summa tertij et quarti et quinti numeri, scilicet cum dragmis $\frac{1}{2}$ 25 et re una et dimidia minus tribus causis, addidi primum numerum, scilicet causam et habui dragmas $\frac{1}{2}$ 25, et rem unam et dimidiam minus duabus causis pro quantitate tertij et quarti et quinti et primi numeri, de qua quantitate extraxi dragmas 17, scilicet tertium numerum; et quartam partem quarti et quinti et primi numeri, et remanserunt pro tribus quartis quarti

et quinti et primi numeri dragme $\frac{1}{2}$ 8 et res una et dimidia minus duabus causis. Et quia cum de aliqua quantitate tollitur quarta pars, illud quod tollitur est tertia pars ex eo quod remanet, quare super $\frac{1}{2}$ 8 et re una et dimidia minus duabus causis addidi tertiam partem eorum, et sic habuit pro summa quarti et quinti et primj numeri dragmas $\frac{1}{3}$ 11 et duas res minus causis $\frac{2}{3}$ 2, quam summam extraxi de summa tertij et quarti et quinti et primi numeri, scilicet de $\frac{1}{2}$ 25 et re una et dimidia minus duabus causis, et remanserunt pro quantitate tertij numeri dragme $\frac{1}{6}$ 14 et due tertie unius causę minus medietate unius rei. Deinde ex summa quarti et quinti et primj numeri, scilicet de dragmis $\frac{1}{3}$ 11 et duabus rebus minus causis $\frac{2}{3}$ 2, et extraxi quintum et primum numerum, scilicet unam rem et unam causam, et remanserunt pro quantitate quarti numeri dragme $\frac{1}{3}$ 11 et res una minus causis $\frac{2}{3}$ 3. Et quia quartus numerus cum quinta parte quinti et primi et secundi numeri facit dragmas 17. Aggregaui quintum et primum et secundum numerum, scilicet rem et causam et dragmas $\frac{1}{2}$ 8 et causam unam minus medietate unius rei, et sic pro summa quinti et primi et secundi numeri habui dragmas $\frac{1}{2}$ 8 et duas causas et medietatem rei, de quibus omnibus accepi quintam partem, scilicet dragmas $\frac{7}{10}$ 1 et $\frac{2}{5}$ unius causę et decimam partem unius rei, et aggregaui hoc super quantitatem quarti numeri, scilicet super $\frac{1}{3}$ 11 et re una minus causis $\frac{2}{3}$ 3, et fuit hoc totum dragme $\frac{1}{30}$ 13 et res una et decima minus causis $\frac{4}{15}$ 3, que equantur
fol. 8 verso dragmis 17; | et quia cum equalibus equalia adduntur omnia fiunt equalia, si utrique parti addantur cause $\frac{4}{15}$ 3, erunt dragme $\frac{1}{30}$ 13 et $\frac{11}{10}$ unius rei equales causis $\frac{4}{15}$ 3,

et dragmis 17; et quia cum ab equalibus equalia auferuntur que remanent sunt equalia, si ab utraque parte auferuntur dragme $\frac{1}{10}$ 13, remanebunt $\frac{11}{10}$ unius rei equales causis $\frac{4}{15}$ 3 et dragmis 4 minus xxx^{a} unius dragmę. Quare ut reducerem hec in equalitatem unius rei tantum, multiplicaui causas $\frac{4}{15}$ 3, dragmas 4 minus xxx^{a} per 10, et diuisi utramque multiplicationem per 11, et inueni quod res una equatur causis 3 minus xxx^{a} tertia parte unius causę et dragmis $\frac{20}{33}$ 3; seruaui hec, et addidi primum numerum cum secundo et tertio, scilicet causam unam cum dragmis $\frac{1}{2}$ 8, et causa una minus medietate rei; et cum dragmis $\frac{1}{3}$ 14 et duabus tertijs unius cause minus medietate unius rei, et habui dragmas $\frac{2}{3}$ 22 et causas $\frac{2}{3}$ 2 et minus una re, de quibus omnibus accepi sextam partem, et addidi eam super quintum numerum, scilicet super rem, et fuit totum illud quod inde aggregatum est $\frac{5}{6}$ unius rei et $\frac{4}{9}$ unius cause et dragme $\frac{7}{9}$ 3, que equantur dragmis 17; quare ab utraque parte extraxi dragmas $\frac{7}{9}$ 3, et remanserunt $\frac{5}{6}$ unius rei et $\frac{4}{9}$ unius causę, que equantur dragmis $\frac{2}{9}$ 13, que ut reducerem ad equalitatem unius rei multiplicaui per 6 $\frac{4}{9}$ unius cause et dragmas $\frac{2}{9}$ 13 per 6, et quod ex utraque multiplicatione peruenit diuisi per 5, et habui quod res una et $\frac{8}{15}$ unius causę equantur dragmis $\frac{13}{15}$ 15. Superius enim inueni quod res una equatur tribus causis minus xxx^{a} tertia parte unius causę et dragmis $\frac{20}{33}$ 3, quare cause 3 minus $\frac{1}{33}$ et $\frac{8}{15}$ unius cause et dragme $\frac{20}{33}$ 3 equantur dragmis $\frac{13}{15}$ 15. Nam cause 3 minus $\frac{1}{33}$ unius cause et $\frac{8}{15}$ eiusdem cause sunt in summa cause $\frac{83}{165}$ 3, ergo cause $\frac{83}{165}$ 3 et dragme $\frac{20}{33}$ 2 equantur dragmis $\frac{13}{15}$ 15, unde si comuniter auferantur dragme $\frac{20}{33}$ 3,

remanebunt cause $\frac{83}{165}$ 3 equales dragmis $\frac{43}{165}$ 12, unde hec omnia multiplicaui per 165, et habui quod cause 578 equantur dragmis 2023, quare diuisi 2023 per 578, et prouenient pro quantitate unius cause, scilicet pro quantitate primi numeri, $\frac{1}{2}$ 3. Quem numerum ut reducerem in integrum, duplicaui omnes numeros suprascriptos et habui pro primo numero 7, pro secundo 17 et unam causam minus medietate unius rei, et pro tertio $\frac{1}{3}$ 28 et duas tertias unius causę minus medietate unius rei, et pro quarto numero habui $\frac{2}{3}$ 22 et rem unam minus causis $\frac{2}{3}$ 3, et pro quinto numero habui tantum rem. Et quia inueni *fol. 9 recto* rem equalem tribus esse causis | minus una xxx^{a} tertia et dragmis $\frac{20}{33}$ 3, duplicaui iterum has dragmas, et peruenerunt dragme $\frac{7}{33}$ 7, et sic res una equatur tribus causis minus $\frac{1}{33}$ unius cause et dragmis $\frac{7}{33}$ 7. Quare multiplicaui causas 3 minus $\frac{1}{33}$ unius cause per numerum unius cause, scilicet per 7, et addidi illud quod prouenit cum dragmis $\frac{7}{33}$ 7, et habui 28 pro quantitate rei, hoc est pro quantitate quinti numeri. Deinde quia secundus numerus est 17 et causa una minus medietate rei, addidi 7 cum causa una, et fuerunt 24, de quibus extraxi medietatem rei, scilicet 14, remanserunt 10 pro secundo numero. Rursus quia tertius numerus est $\frac{1}{3}$ 28 et $\frac{2}{3}$ unius cause minus medietate rei, addidi duas tertias unius cause, scilicet de 7 cum $\frac{1}{3}$ 28., et habui 33, de quibus eieci medietatem rei, scilicet 14; remanserunt pro tertio numero 19. Item quia quartus numerus est $\frac{2}{3}$ 22 et res una minus tribus causis et $\frac{2}{3}$ unius cause, addidi rem, scilicet 28, cum $\frac{2}{3}$ 22, et prouenerunt $\frac{2}{3}$ 50, de quibus eieci causas $\frac{2}{3}$ 3, scilicet $\frac{2}{3}$ 25, remanserunt pro quarto numero 25. Et sic, ut uestre se-

renissime maiestati transmisi, primus numerus est 7, secundus 10, tertius 19. Quartus 25. Quintus 28, et numerus in quo equantur ipsi numeri est 34.

De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta, questio notabilis.

Secunda uero questio fuit de quatuor hominibus bizantios habentibus; qui bursam bizantiorum inuenerunt, ex quibus primus cum bursa excedit secundum et tertium hominem in duplico. Secundus tertium et quartum in triplo. Tertius quartum et primum in quadruplo. Quartus uero homo cum bursa excedit primum et secundum in quincuplo, hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur primum hominem habere debitum; ad quod demonstrandum ponam pro bizantijs primi hominis dragmam, qua addita cum bursa egredietur dragma una et bursa una, que sunt duplvm bizantiorum secundi et tertij hominis, quare inter secundum et tertium hominem habetur equale medietatis burse et unius dragme, de qua medietate ponam secundum hominem habere rem, remanet ergo pro bizantijs tertij hominis medietas burse et unius dragme minus una re, de inde addam bursam cum quantitate secundi hominis, et erit illud quod aggregabitur bursa una et res una, quorum tertia pars est equalis quantitatis bizantiorum tertij et quarti hominis; ergo inter tertium et quartum hominem habent tertiam burse et unius rei, de qua tertia si auferatur quantitas bizantiorum tertij hominis, scilicet medietas burse et unius dragme minus re una, remanebunt pro quantitate bizantiorum quarti

hominis quatuor tertie unius rei minus sexta unius burse et medietate unius dragme, super que addam dragmam, scilicet quantitatem primi hominis, et habebunt inter quartum et primum hominem quatuor tertias unius rei
fol. 9 verso et medietatem dragmę | minus sexta parte unius burse, quod totum quadruplicabo, et prouenient quinque res et tertia et dragme 2 et minus $\frac{2}{3}$ unius burse, que equantur coniuncto quantitatis tertij hominis et bursę. Nam tertius homo habet, ut superius inuenctum est, medietatem burse et unius dragmę, re una diminuta, quibus si addatur bursa, erit bursa una et dimidia et medietas dragme minus una re, que equantur rebus $\frac{1}{3}$ 5 et dragmis 2 minus $\frac{2}{3}$ unius burse, quare si communiter addantur $\frac{2}{3}$ unius burse $\frac{1}{6}$ et res una, erunt burse $\frac{1}{6}$ 2 et medietas dragmę, que equantur rebus $\frac{1}{3}$ 6 et dragmis 2. Quare si communiter auferatur medietas dragmę, remanebunt $\frac{13}{6}$ unius burse, que equantur rebus $\frac{1}{3}$ 6, et dragme $\frac{1}{2}$ 1 Quare, ut redigantur hec ad quantitatem unius burse, multiplicabo res $\frac{1}{3}$ 6 et dragmam $\frac{1}{2}$ 1 per 6, et egredientur 38 res et dragme 9 diuidende per 13, exibunt res 3 minus $\frac{1}{13}$ et $\frac{9}{13}$ unius dragme, que equantur uni burse, seruabo hec et addam bursam cum quantitate quarti hominis, scilicet cum $\frac{4}{3}$ unius rei minus $\frac{1}{6}$ unius burse et medietate unius dragme, et habebo $\frac{4}{3}$ unius rei et $\frac{5}{6}$ unius burse minus medietate unius dragmę, que equantur quincuplo quantitatis primi et secundi hominis, qui habent dragmam et rem, ex quorum quincuplo proueniunt quinque res et quinque dragme, ergo $\frac{4}{3}$ unius rei et $\frac{5}{6}$ unius burse minus medietate unius dragme equantur quinque rebus et quinque dragmis. Quare si communiter addatur medietas

dragme, erunt $\frac{4}{5}$ unius rei et $\frac{5}{6}$ unius burse equales quinque rebus et dragmis $\frac{1}{2}$ 5. Quare si comuniter auferatur $\frac{4}{5}$ unius rei remanebunt res $\frac{2}{3}$ 3 et dragme $\frac{1}{2}$ 5, que equantur $\frac{5}{6}$ unius burse, quare, ut redigam hec ad bursam unam, multiplicabo res $\frac{2}{3}$ 3 et dragmas $\frac{1}{2}$ 5 per 6, et egredientur res 22 et dragme 33, quas diuidam per 5 et uenient res $\frac{2}{5}$ 4, et dragme $\frac{3}{5}$ 6, que equantur burse. Inuenctum est superius quod tres res minus $\frac{1}{13}$ unius rei et $\frac{9}{13}$ unius dragmę equari (*sic*) uni burse, ergo res $\frac{2}{5}$ 4 et dragme $\frac{3}{5}$ 6 equantur tribus rebus minus $\frac{1}{13}$ unius rei et $\frac{9}{13}$ unius dragme, quod est impossibile. Quia res $\frac{2}{5}$ 4 sunt plures rebus $\frac{12}{13}$ 2, et dragme $\frac{3}{5}$ 6 sunt plures de $\frac{9}{13}$ unius dragme. Vnde si concedatur primum hominem habere debitum, inuenietur secundum hanc inuestigationem quod res $\frac{2}{5}$ 4 minus dragmis $\frac{3}{5}$ 6 equantur rebus $\frac{12}{13}$ 2 minus $\frac{9}{13}$ unius dragme. Vnde si communiter auferantur $\frac{9}{13}$ unius dragme, remanebunt res $\frac{12}{13}$ 2, que equantur rebus $\frac{2}{5}$ 4 minus dragmis $\frac{59}{65}$ 5. Quàre $\frac{59}{65}$ 5 si communiter addantur dragme $\frac{59}{65}$ 5, remanebunt res $\frac{2}{5}$ 4 que equantur rebus $\frac{12}{13}$ 2 et dragmis | $\frac{59}{65}$ 5. Quare si fol 10 recto communiter auferantur res $\frac{12}{13}$ 2 remanebunt res $\frac{31}{65}$ 1, que equantur dragmis $\frac{59}{65}$ 5. Et, ut hec habeantur in integris numeris, multiplicabo utrumque numerum per 65, et egredientur res 96, que equantur dragmis 384. Ergo proportio rerum ad dragmas est sicut 96 ad 384, que pròportio in minoribus numeris est sicut 1 ad 4, ergo res una equatur quatuor dragmis, vnde si ponam rem esse 4, scilicet quantitatem secundi hominis, erit debitum primi biz. 1. Et quia inuenimus superius quod bursa equatur rebus $\frac{2}{5}$ 4 minus dragmis $\frac{3}{5}$ 6, si de rebus $\frac{2}{5}$ 4, que sunt biz. $\frac{3}{5}$ 17, auferantur dragme $\frac{3}{5}$ 6, hoc est biz. $\frac{3}{5}$ 6, remanebunt 11

pro bizantijs burse, et quia tertius homo habet medietatem burse minus medietate dragme et re una, si de medietate burse, scilicet de $\frac{1}{2}$ 5, auferatur res una et medietas dragme, scilicet $\frac{1}{2}$ 4, remanebit biz. 1 pro quantitate tertij hominis. Rursus quia quartus homo habet $\frac{4}{3}$ unius rei et medietatem unius dragme minus sexta parte unius burse, si de $\frac{4}{3}$ unius rei et de medietate unius dragme, scilicet de $\frac{5}{6}$ 5, auferatur sexta unius burse, scilicet biz. $\frac{5}{6}$ 1, remanebunt 4 pro bizantijs quarti hominis.

De eadem re.

Super similes quidem quatuor hominum questiones, in quibus multiplicia que habent cum bursa ponuntur ex ordine super quantitatem, quam habent super duos homines sibi inuicem sequentes, inueni hanc generalem, uidelicet ut pro radice quantitatis secundi hominis habeantur 2, et pro radice burse habeatur 1, deinde numerus multiplicitatis primi et burse quam habent super secundum et tertium hominem, addatur super radicem secundi hominis, et habebitur quantitas eius, et quartus homo habebit totidem, et tertius homo habebit semper 1, et debitum primi erit 1 semper. Deinde quot unitates sunt in multiplicitate predicta, tot numeros pares, á quaternario incipiendo, addantur simul ex ordine, et quot inde prouenient addatur super radicem burse, scilicet super 1, et habebitur quantitas burse. Verbi gratia: habeat primus cum bursa quadruplum secundi et tertij; secundus uero habeat quincuplum tertij et quarti. Tertius namque sexcuplum habeat quarti et primi. Quartus 4.us
quoque habeat cum bursa septuplum primi et secundi.

Quia numerus multiplicitatis, quam habet primus cum bursa super secundum et tertium hominem, est 4, addam 4 super radicem secundi hominis, scilicet super 2, et egredientur 6 pro quantitate quam habet unusquisque secundi et quarti hominis, deinde pro eodem quadruplo colligam .IIII.or numeros pares secundum quod sunt in ordine numerorum, incipiendo ab 4, uidelicet 4 et 6 et 8 et 10, et erunt 28, quos addam super radicem burse, scilicet super 1, et egredientur 29 pro bizantijs burse et sic procedendum est in omnibus similibus quatuor hominum questionibus.

Item de modo predicto extraxi hanc regulam super inuentionem trium numerorum, quorum primus cum tertia parte reliquorum numerorum surgat in 14. Secundus uero cum quarta parte reliquorum surgit in 17. Tertius namque cum $\frac{1}{5}$ primi et secundi numeri surgit in 19. Pateat quidem serenitati uestre hanc questionem á me solutam esse in tertio decimo capitulo libri mei dupliciter. Sed quia huius solutionis inuentio placet mihi pre ceteris modis, uolui eam uestre pandere maieśtati. Posui primum in ordine $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$, et extraxi unum quodque ipsorum de uno integro, remanserunt $\frac{2}{3}$ sub $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sub $\frac{1}{4}$ et $\frac{4}{5}$ sub $\frac{1}{5}$, post hoc de 14 et 17 et de 19 extraxi 14 remansit 0 super 14 et 3 super 17 et 5 super 19, ut in questione cernitur. Deinde incepi ad $\frac{2}{3}$, et multiplicaui 2 per 3, et quod prouenit diuisi per multiplicationem de 3 in 2, et prouenit 1, quod posui sub $\frac{2}{3}$, et multiplicaui iterum eadem 2 per 4 que sunt sub uirga de $\frac{3}{4}$, et summam diuisi per 3 que sunt sub uirga, et per 3 que sunt super 4, et prouenerunt $\frac{8}{9}$ sub $\frac{3}{4}$. Rursus multiplicaui eadem 2 per 5 que sunt sub uirga de $\frac{4}{5}$, et diuisi summam per 3 que sunt sub uirga fol. 10 verso

de $\frac{2}{3}$, et per 4 que sunt super uirga de $\frac{4}{5}$, et prouenerunt $\frac{5}{6}$ sub $\frac{4}{5}$, de inde multiplicaui 3 que sunt sub uirga de $\frac{2}{3}$ per 0, quod est super 14, et diuisi per 2 et prouenit 0 super ipsum 0. Item multiplicaui 4 que sunt sub uirga de $\frac{3}{4}$, per 3 que sunt super 17, et diuisi per 3 que sunt super 4, et prouenerunt 4 super ipsis tribus. Adhuc multiplicaui 5 que sunt sub uirga de $\frac{4}{5}$ per 5 que sunt super 19, et diuisi per 4 que sunt super 5, et prouenerunt $\frac{1}{4}$ 6, que seruaui super 19, ut in figura cernitur (1). Post hoc collegi 1 et $\frac{8}{9}$ et $\frac{5}{6}$ in unum, et fuerunt $\frac{49}{18}$. Similiter addidi $\frac{1}{4}$ 6 et 4 et 0 et fuerunt $\frac{1}{4}$ 10, que omnia diuisi per 1 minus multitudinem numerorum positorum, scilicet per 2, et prouenerunt $\frac{49}{36}$ et $\frac{1}{8}$ 5. Addidi $\frac{1}{8}$ 5 cum 14 fuerunt $\frac{1}{8}$ 19, et extraxi unum integrum de $\frac{49}{36}$, remanserunt pro quantitate primi numeri $\frac{13}{36}$ cuiusdam summę, que suma (*sic*) est quantitas secundi et tertij numeri. Cum quibus $\frac{13}{36}$ addidi tertiam eiusdem summe, scilicet $\frac{12}{36}$, fuerunt $\frac{25}{36}$. Quare multiplicaui $\frac{1}{8}$ 19 per 36, et diuisi summam per 25, et prouenerunt $\frac{27}{50}$ 27 pro quantitate secundi et tertij numeri. De quibus accepi tertiam partem que est $\frac{9}{50}$ 9, et extraxi ipsam de 14, remanserunt $\frac{41}{50}$ 4 pro quantitate primi numeri, deinde accepi $\frac{8}{9}$ de $\frac{27}{50}$ 27 que sunt $\frac{12}{25}$ 24, | et extraxi inde primum numerum, scilicet $\frac{41}{50}$ 4, remanserunt $\frac{33}{50}$ 19, de quibus abieci 4 pro ipsis 4 que sunt super 17, remanserunt $\frac{33}{50}$ 15 pro quantitate tertij numeri, que extraxi de $\frac{27}{50}$ 27, remanserunt $\frac{44}{50}$ 11 pro secundo numero. Ad demonstrandum siquidem qualiter talis inuentio, siue regula, proueniat ex modo supra-

fol. 11 recto

(1) Vedi Fig. 5.

scripto trium hominum. Ponam secundum et tertium numerum esse rem, de qua abiecta tertia parte sui, cum qua primus numerus surgit in 14, remanebunt $\frac{2}{3}$ eiusdem rei; et quia, ut dictum est, cum de quacumque re tollitur $\frac{1}{3}$; illud quod tollitur est medietas eius quod remanet, vnde si super $\frac{2}{3}$ rei addatur meditetas eius, redibit res predicta; quod etiam habetur si multiplicentur $\frac{2}{3}$ dictę rei per 3, et quod prouenerit diuidatur per 2, et est illud idem quando multiplicaui superius 3 per 2, et diuisi per 2 uicibus 3, et habui tunc rem positam pro secundo et tertio numero, pro qua posui 1 sub $\frac{2}{3}$, de qua re accepi tertiam partem, et abieci de 14, remanserunt 14 minus tertia rei pro quantitate primi numeri, quibus additis cum secundo numero et tertio, scilicet cum re una, erit tota suma (*sic*) ipsorum trium numerorum nihil amplius de 14 et de $\frac{2}{3}$ unius rei, et propter hoc posui 0 super 14, et $\frac{2}{3}$ sub $\frac{1}{3}$, et quia secundus numerus cum $\frac{1}{4}$ tertij et primi numeri surgit in 17, et extraxi 17 de suma (*sic*) ipsorum trium numerorum, scilicet de 14 et de $\frac{2}{3}$ unius rei, et remanserunt $\frac{3}{4}$ primi et secundi numeri et $\frac{2}{3}$ unius rei minus 3, et ideo posui 3 super 17 et $\frac{3}{4}$ sub $\frac{1}{4}$; et quia cum de aliqua quantitate extrahitur quartą pars, illud quod tollitur est tertia pars residui.

Addidi super $\frac{2}{3}$ unius rei minus tertiam partem eorum, quod fit cum multiplicantur 2 que sunt super 2 et per 4 que sunt sub uirga de $\frac{3}{4}$, et diuiditur per 3 que sunt sub uirga de $\frac{2}{3}$, et per 3 que sunt super uirga de $\frac{3}{4}$, et cum multiplicantur 4 que sunt sub uirga de $\frac{3}{4}$ per 3 posita super 17, et suma (*sic*) diuiditur per 3 que sunt super 4, quia cum super aliqua quantitate additur tertia pars et fit inde alia quantitas, erit proportio primę quantitatis ad

secundam sicut 3 est ad 4, quare multiplicande sunt $\frac{2}{3}$ unius rei minus 3 per 4, et suma diuidenda est per 3. Nam ex multiplicatione de 4 in $\frac{2}{3}$ unius rei minus 3 ueniunt $\frac{8}{3}$ unius rei minus 12, quibus diuisis per 3 ueniunt $\frac{8}{9}$ unius rei minus 4; et ideo posui $\frac{8}{9}$ sub $\frac{3}{4}$, et 4 super 3 positis super 17. Rursus quia tertius numerus cum quinta parte primi et secundi numeri surgit in 19, si de $\frac{2}{3}$ unius rei, et de 14 auferantur 19, remanebunt pro $\frac{4}{5}$ primi et secundi numeri $\frac{2}{3}$ unius rei minus 5, et ideo super 19 posui 5, et sub $\frac{1}{5}$ posui $\frac{4}{5}$. Et quia cum de aliqua quantitate extrahitur quinta pars, illud quod extrahitur est quarta
fol. 11 verso pars residui. Ideo super $\frac{2}{3}$ | unius rei minus 5 addenda est quarta pars eorum super ipsas, quod fit cum $\frac{2}{3}$ unius rei minus 5 multiplicantur per 5, et summa diuiditur per 4, et sic habuimus $\frac{5}{6}$ rei minus $\frac{1}{4}$ 6 pro quantitate primi et secundi numeri, que $\frac{1}{4}$ 6 posite sunt superius super 19, et $\frac{5}{6}$ sub $\frac{4}{5}$, et sic ex hac inuentione habui pro secundo et tertio numero rem, et pro tertio et primo habui $\frac{8}{9}$ unius rei minus 4, et pro primo et secundo numero $\frac{5}{6}$ minus $\frac{1}{4}$ 6, quibus omnibus in unum congregaui superius, et habui $\frac{49}{18}$ unius rei minus $\frac{1}{4}$ 10, quod fuit equale duplo sumę (*sic*) ipsorum trium numerorum, cum in ipsa congregatione unusquisque ipsorum trium numerorum bis conputatus fit, et ideo mediaui prescripta $\frac{49}{18}$ unius rei minus $\frac{1}{4}$ 10, et habui $\frac{49}{36}$ unius rei minus $\frac{1}{8}$ 5 pro quantitate ipsorum trium numerorum, de quibus abieci integrum unum pro re una, remanserunt $\frac{13}{36}$ unius rei, que est quantitas secundi et tertij numeri minus $\frac{1}{8}$ 5 pro quantitate primi numeri. Super quod addidi tertiam partem rei, et habui $\frac{25}{36}$ unius rei minus $\frac{1}{8}$ 5, que equantur 14 addidi ergo $\frac{1}{8}$ 5

super 14 et prouenerunt $\frac{25}{36}$ unius rei, que equantur $\frac{1}{8}$ 19. Quare multiplicaui 36 per $\frac{1}{8}$ 19, et sumam (*sic*) diuisi per 25, et habui $\frac{27}{50}$ 27 pro quantitate unius rei, scilicet pro suma (*sic*) secundi et tertij numeri, de qua suma (*sic*) accepi tertiam partem, et extracxi eam de 14, et quod remansit, scilicet $\frac{41}{50}$ 4, fuit quantitas primi numeri. Et quia quantitas primi et tertij numeri fuit $\frac{8}{9}$ unius rei minus 4, de $\frac{8}{9}$ rei minus 4, scilicet de $\frac{12}{25}$ 20, extracxi primum numerum, scilicet $\frac{41}{50}$ 4, remanserunt $\frac{33}{50}$ 15 pro quantitate tertij numeri, quem numerum extracxi de suma (*sic*) secundi et tertij numeri, scilicet de $\frac{27}{50}$ 27, remanserunt $\frac{44}{50}$ 11 pro quantitate secundi numeri.

De quatuor hominibus bizantios habentibus.

Posvi hanc aliam questionem similem suprascripte questionis, sancte et uenerande pater domine Ranerij dignissime Card., ut que in prescripta questione dicta sunt melius clementia uestra intendere ualeat. Sunt enim quatuor homines bizantios habentes, ex quibus primus cum medietate bizantiorum reliquorum trium hominum habeat 33. Secundus cum tertia parte bizantiorum reliquorum trium habeat 35. Tertius quoque cum $\frac{1}{4}$ bizantiorum reliquorum habeat 36. Quartus uero cum $\frac{1}{5}$ bizantiorum primi et secundi et tertij hominis habeat 37; queritur quot unusquisque habuit. Posui quidem hos numeros studiose, ut solutio huius questionis cadat in integris numeris, et ostendam hanc insolubilem esse sub posita conditione. Ad quod demonstrandum ponam secundum et tertium et quartum hominem habere rem, cuius rei medietas si addatur super

bizantios primi, nimirum surgent in 33, ut propositum est. Quare patet manifeste primum hominem habere 33 minus
fol. 12 recto medietate rei, que addita cum bizantijs secundi | et tertij et quarti hominis, scilicet cum re, uenient 33 et medietas rei pro tota suma (*sic*) bizantiorum quatuor hominum, de qua summa secundus cum $\frac{1}{3}$ bizantiorum reliquorum trium hominum proponitur habuisse 35. Quare si auferantur 35 de bizantijs 33 et de medietate rei, remanebit pro $\frac{2}{3}$ bizantiorum ipsorum, scilicet tertij et quarti et primi hominis, medietas rei minus bizantijs. 2. Et quia cum de aliqua quantitate tollitur tertia pars, id quod tollitur est medietas eius quod remanet. Si super medietate rei minus 2 addatur medietas eius, uenient $\frac{3}{4}$ rei minus bizantijs 3 pro quantitate bizantiorum tertij et quarti et primi hominis. Ad que etiam ueniemus si multiplicauerimus medietatem rei minus 2 per 3, et diuiserimus per 2. Rursus quia proponitur tertium hominem cum $\frac{1}{4}$ bizantiorum quarti et secundi et primj hominis habere 36, si de tota suma (*sic*), scilicet ex 33 et medietate rei, tollamus 36, remanebit pro $\frac{3}{4}$ bizantiorum quarti et primj et secundi hominis medietas rei minus bizantijs 3. Et quia cum de aliqua quantitate tollitur $\frac{1}{4}$, illud quod tollitur est $\frac{1}{3}$ eius quod remanet, si super $\frac{1}{2}$ rei minus 3 addatur tertia eius, hoc est quod multiplicetur $\frac{1}{2}$ rei minus 3 per 4, et suma (*sic*) diuidatur per 3, uenient $\frac{2}{3}$ rei minus 4 pro quantitate bizantiorum eorumdem quarti et primi et secundi hominis. Item quia quartus homo cum $\frac{1}{5}$ bizantiorum primi et secundi et tertij hominis habet 37, si de tota suma (*sic*) eorum IIII^{or} hominum tollantur 37, remanebit pro $\frac{4}{5}$ bizantiorum primi et secundi et tertij hominis medietas rei minus bizantijs 4, quam si

multiplicauerimus per 5, que sunt sub uirga de $\frac{4}{5}$, et que prouenerint diuiserimus per 4, que sunt super uirga, habebimus $\frac{4}{5}$ rei minus bizantijs 5 pro quantitate bizantiorum primi et secundi et tertij hominis. Addamus ergo rem, quam habent inter secundum et tertium et quartum hominem, cum $\frac{3}{4}$ rei minus 3, que habent inter tertium et quartum et primum hominem, et cum $\frac{2}{3}$ rei minus 4, que habent inter quartum et primum et secundum hominem. Et cum $\frac{4}{5}$ rei minus 5, que habent inter primum et secundum et tertium hominem, uenient res $\frac{1}{24}$ 3 minus bizantijs 12, pro triplo bizantiorum IIII.or hominum, cum in prescriptis partibus unusquisque ter computatus sit. Quare si diuiserimus res $\frac{1}{24}$ 3 minus bizantijs 12 per 3, habebimus rem $\frac{1}{72}$ 1 minus bizantijs 4 pro quantitate bizantiorum IIII.or hominum, de qua suma (*sic*) si auferatur res, quam habent inter secundum et tertium et quartum hominem, remanebit $\frac{1}{72}$ rei minus 4 pro quantitate bizantiorum primi hominis, super quam si addiderimus medietatem rei, scilicet $\frac{1}{2}$ bizantiorum secundi et tertij et quarti hominis, erunt $\frac{37}{72}$ minus bizantijs 4, que equantur bizantijs 33. Comuniter si addiderimus bizantios 4, erunt $\frac{37}{72}$ rei equales de bizantjis 37. Vnde ut ueniamus ad notitiam unius rei, multiplicanda sunt 72 per bizantios 37, et suma (*sic*) diuidenda est per 37 que sunt super uirga, | uel diuidantur bizantijs 37 per 37, et 1 quod prouenit ex diuisione ducatur in 72, et uenient bizantij 72 pro quantitate rei, et tot habent inter secundum et tertium et quartum hominem. Et quia proponitur primum hominem cum medietate bizantiorum secundi et tertij et quarti hominis habere 33, et predictorum 72 bizantiorum medietas est plus de 33. Colligitur inde hanc questionem insolubilem esse, cum fol. 12 verso

non possit dici, quatuor homines habent bizantios, cum primus non habeat aliquid, immo habet debitum. Quare si uoluerimus concedere ipsum habere debitum, erit questio solubilis. Et erit debitum ipsius 3, scilicet differentia que est a 33 usque in 36 predictis, quod debitum si extrahatur ex bizantijs secundi et tertij et quarti hominis, remanebunt 69 pro suma (*sic*) bizantiorum IIII.[or] hominum, ex quibus si extrahantur $\frac{3}{4}$ rei minus bizantijs 3, scilicet bizantij 51, remanebunt bizantij secundi hominis 18. Item extractis $\frac{4}{5}$ rei minus bizantijs 4, que habent inter quartum et primum et secundum hominem, hoc bizantij (*sic*) 44 de 69, remanent 25 pro bizantijs tertij hominis, quibus additis cum bizantijs secundi hominis, scilicet cum 18, erunt 43, quibus extractis ex bizantijs secundi et tertij et quarti hominis, scilicet de bizantijs 72, remanebunt pro bizantijs quarti hominis 29. Vel aliter, de 69 predictis extrahantur $\frac{5}{6}$ rei minus bizantijs 5, que habent inter primum et secundum et tertium hominem, remanebunt similiter quarto homini 29. Et si dicemus primum hominem habere cum sua petitione 181. Secundum 183, Tertium 184, Quartum 185. Inueniemus, suprascriptis dispositis, primum hominem habere 1, Secundum 94, Tertium 125, Quartum 141.

De quatuor hominibus qui inuenerunt bizantios.

Qvatuor homines inuenerunt bizantios aliquot, de quibus unusquisque sumpsit aliquam quantitatem fortuitu. Et cum uellent ipsos bizantios inter se equaliter diuidere, primus duplicauit secundo bizantios quos ceperat. Post hoc secundus triplicauit tertio homini totum id quod sumpse-

rat. Quo facto tertius homo quadruplicauit quarto homini bizantios suos, et quartus post hoc quincuplicauit primo homini bizantios quos ei remanserunt post duplicationem quam fecerat secundo homini, et sic unusquisque de inuentis bizantijs suam habuit portionem, scilicet quartam partem. Queritur que fuit suma (*sic*) inuentorum bizantiorum, et quot ex ipsis unusquisque cepit. Ponam secundum hominem habuisse rem, quam cum ei duplicasset primus homo habuit duas res, et primo homini remansit quinta pars quartae partis totius summae, cum ex quincuplo eius quod ei remanserat habuit quartam partem summae. Vnde si de quarta parte sume (*sic*) auferatur $\frac{1}{20}$ eiusdem, remanebunt $\frac{4}{20}$, hoc est $\frac{1}{5}$, pro eo quod quartus homo dedit primo homini, que quinta si addatur super $\frac{1}{4}$, summa que remansit quarto homini post dationem quam fecit primo, erunt $\frac{9}{20}$ totius summae, et tantum habuit quartus homo, cum quadruplicatione sibi facta a tertio homine. Quare quarta pars de $\frac{9}{20}$, scilicet $\frac{9}{80}$, totius sumae (*sic*) fuit illud quod cepit quartus homo, | et triplum eius, quod est $\frac{27}{80}$, est illud quod *fol. 13 recto* accepit a tertio homine, quibus $\frac{27}{80}$ additis cum quarta parte, scilicet cum $\frac{20}{80}$ totius summe, faciunt $\frac{47}{80}$ eiusdem summe, et tantum habuit tertius homo, cum triplicatione sibi facta a secundo homine. Quare tertia pars, scilicet $\frac{47}{240}$ totius summe, fuit illud quod cepit tertius homo, et duplum de $\frac{47}{240}$, hoc est $\frac{94}{240}$, acceperat à secundo homine, quibus $\frac{94}{240}$ additis cum quarta parte sume (*sic*), que remanserat secundo homini, reddunt $\frac{154}{240}$ pro eo quod habuit secundus homo cum duplicatione sibi facta à primo homine, que equantur duabus rebus. Quare medietas eorum, scilicet $\frac{77}{240}$ totius summe, est id quod cepit secundus homo,

et alias $\frac{77}{240}$ habuerat à primo, quibus $\frac{77}{240}$ additis cum $\frac{1}{20}$ summe, que remanserat primo homini post duplicationem, quam fecerat secundo, erunt $\frac{89}{240}$ pro eo quod cepit primus homo. Vnde si summam ponimus esse 240, erit illud quod sumpsit primus 89, et illud quod cepit secundus 77, et illud quod cepit tertius 47, et illud quod cepit quartus 27, scilicet $\frac{9}{80}$ de bizantijs 240. Et si dictum fuerit, quod primus homo de hoc quod cepit duplicauit omnes quantitates aliorum trium. Et secundus post ipsam duplicationem triplicauit omnia que habebant reliqui tres, et post ipsam triplicationem tertius quadruplicauit ea que habebant reliqui tres homines. Et ad extremum quartus homo quincuplicauit omnes quantitates quas habebant reliqui tres, et sic habuit unusquisque quartam partem totius summae. Ponam rem esse residuum quod remansit primo homini post duplicationem quam fecit reliquis, et triplicabo illam rem pro triplicatione quas sibi fecit secundus homo, et erunt res tres, quas quadruplicabo pro quadruplicatione quam fecit ei tertius homo, uenient res 12 quibus et multiplicatis per 5, pro quincuplatione quam fecit quartus homo, erunt res 60, que sunt quarta totius summae, cum proponatur unum quemque habuisse, post predictas multiplicitates, quartam partem. Quare multiplicabo 60 res per 4, et habebo res 240 pro summa bizantiorum IIII[or] hominum: Deinde ponam ad libitum rem esse bizantios 2, et erit tota summa 480, de quibus extraham bizantios 2 prescriptos, remanebunt bizantij 478, qui sunt duplum bizantiorum secundi et tertij et quarti hominis, et medietatem eorum habuerunt ex duplicatione quam fecerat ei primus homo. Quare si medietatem de 478, que est 239, addamus

super bizantios 2, qui remanserunt primo homini, habebo 241 pro quantitate bizantiorum primi hominis. Deinde ponam rem pro quantitate, que remansit secundo homini post triplicationem quam fecit reliquis tribus, et quadruplicabo ipsam rem, et illud quadruplum quincuplabo, | et habebo 20 res pro quarta parte totius summe. Ergo 20 res equantur bizantijs 120, unde si diuidantur 120 per 20, uenient bizantij 6 pro quantitate rei, quibus bizantijs 6 extractis de 480, remanent 474 pro triplo bizantiorum tertij et quarti et primj hominis. Quare tertia pars erat quantitas bizantiorum ipsorum, et due tertie de 474, scilicet 316, fuerunt id quod acceperant a secundo homine, quibus bizantijs 316 additis cum bizantijs 6, qui remanserunt ipsi secundo, erunt bizantij 322, et tot habuit secundus homo post duplicationem sibi factam à primo homine. Ergo medietas de 322, que est 161, fuit quantitas bizantiorum secundi hominis. fol. 13 verso

Rursus ponam rem pro eo quod remansit tertio homini post quadruplicationem quam fecerat alijs, et quincuplabo ipsam rem, et erunt quinque res equales quarti summe, scilicet de 120. Quare res erit bizantij 24, quibus extractis de 480, remanent 456 pro quadruplo bizantiorum quarti et primi et secundi hominis, ex quibus habuerunt tres quartas, scilicet 342, a tertio homine, quibus bizantijs 342 additis cum bizantijs 24 predictis, erunt bizantij 366, et tot habuit tertius homo post duplicationem et triplicationem sibi factas à primo et à secundo homine, de quibus si accepero medietatem tertie partis, scilicet sextam, venient bizantij 61 pro quantitate tertij hominis. Extractis ergo bizantijs 241 primi hominis, et 161 secundi, et 61 tertij de tota suma (*sic*), remanebunt 17 pro bizantijs quarti hominis.

Aliter, quia omne duplicatum ex suo duplicante existit medietas, et triplicatum ex triplicante est tertia, et quadruplicatum ex quadruplicante sit quarta, et quincuplatum ex suo quincuplante quintam obtinet partem. Ponam in
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ ordine $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$, ut in margine cernitur, et multiplicabo 2 per 3 uicibus 4, uicibus 5, que sunt sub uirgis, erunt 120, que sunt quantitas quarte partis omnium bizantiorum inuentorum, quibus multiplicatis per 4, reddunt 480 pro tota summa; deinde tollam 1 quod est super 2 de 2, et 1 quod remanet ducam in 3 uicibus 4, uicibus 5, erunt 60, quibus etiam ductis in numerum hominum, scilicet in 4, erunt 240, quibus si addatur 1, quod prouenit ex ducto 1 quod est super 2, in 1 quod est super 3, quod in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, erunt 241, que sunt quantitas bizantiorum primj. Rursus extraham 1 quod est super 3 de 3, remanent 2, quibus ductis in 4 uicibus 5, uicibus 2, que sunt sub uirgis, et in numerum hominum, erunt 320, quibus addam 2, que proueniunt ex 2, quod est sub prima uirga, in 1 quod est super 3, quod in 1 quod
fol. 14 recto est super 4, quod in 1 quod est super 5, erunt 322 | que sunt duplum bizantiorum secundi. Quare ducam 322 in 1 quod est super 2, et diuidam per 2, uenient 161 pro bizantijs secundi hominis. Item extraham 1, quod est super 4, de 4, remanent 3, que ducam in 5 uicibus 2, uicibus 3, que sunt sub alijs uirgis, erunt 90, que ducam in 4, et superaddam 6, que proueniunt ex ductis 2 in 3, que sunt sub uirgis, quod in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, erunt 366, et tot habuit tertius homo post duplicationem et triplicationem sibi factas a primo et secundo homine. Vnde si de 366 acceperimus

medietatem tertiae partis ipsorum, scilicet sextam uenient 61 pro bizantijs tertij hominis. Ad ultimum quippe extraham 1, quod est super 5, de 5, remanent 4, quibus ductis in 2 uicibus 3, uicibus 4, que sunt sub uirgis, et illud totum per 4, scilicet per numerum hominum, erunt 384, quibus addam 24, que proueniunt ex multiplicatione de 2 vicibus 3, vicibus 4, que sunt sub uirgis, ducta in 1 quod est super 5, erunt 408, et tot habuit quartus homo, post duplicationem et triplicationem et quadruplicationem sibi factas à primo et secundo et tertio homine. Quare si de 408 acceperimus medietatem tertiae quartae partis, hoc est $\frac{1}{24}$ uenient 17 pro quantitate bizantiorum quos cepit quartus homo, ut superius inuentum est. Aliter, positis $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ per ordinem, et inuentis bizantijs 480 pro summa bizantiorum ipsorum quatuor hominum, extraham $\frac{1}{2}$ de uno integro, et pro $\frac{1}{2}$ quod remanet accipiam medietatem de 480, et superaddam 1 quod prouenit ex ducto 1 in 1, quod in 1, quod in 1, que unitates sunt super IIII[or] uirgis, erunt 241, et tot cepit ex ipsa suma (*sic*) primus homo. Rursus extraham $\frac{1}{3}$ de uno integro, remanent $\frac{2}{3}$, de quibus accipiam medietatem, ueniet $\frac{1}{3}$ pro quo accipiam $\frac{1}{3}$ de 480, et superaddam 1, quod prouenit ex ductione dictarum unitatum in se, et habebo 161, et tot cepit secundus homo. Item tollam $\frac{1}{4}$ de uno integro, remanebunt $\frac{3}{4}$. de quibus accipiam medietatem tertiae partis ipsarum, ueniet $\frac{1}{8}$, pro quo accipiam octauam partem de 480, et addam similiter 1, et habebo 61 pro bizantijs tertij hominis. Adhuc demam $\frac{1}{5}$ de uno integro remanent $\frac{4}{5}$, de quibus accipiam medietatem tertiae quartae partis ipsorum 5, ueniet $\frac{1}{30}$, pro quo accipiam trigeximam partem

de 480, et superaddam 1, et habebo 17 pro bizantijs quarti hominis.

Questio similis suprascripte de tribus hominibus.

Item Tres homines habebant bizantios, et cum primus duplicauerit bizantios reliquorum, nec non et addiderit eis medietatem omnium que habebant, et secundus triplicauerit
fol. 14 verso bizantios tertij et primi hominis, et addiderit eis tertiam bizantiorum ipsorum, et Tertius quadruplicauit bizantios reliquorum, et addiderit eis quartam bizantiorum ipsorum, et habuit unusquisque suam portionem, scilicet tertiam.

Sciendum est primum, quod quando aliqua res duplicatur et additur super eam medietas eius, tunc illa res sui dupli et dimidii est $\frac{2}{5}$. Similiter cum aliqua res triplicatur et additur ei tertia pars sui, tunc illa res sui tripli et tertie eius est $\frac{1}{10}$ Eodemque modo, cum aliqua res quadruplicatur et additur ei quarta ipsius rei, tunc illa res ex quadrupli sui et quarte est $\frac{4}{17}$, quare ponam in or-
$\frac{4}{17}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5}$ dine $\frac{4}{71}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5}$, et imitabor primum ultimam regulam predictam, hoc est cum multiplicabo 5 uicibus 10, uicibus 17, quo sunt sub uirgis, uenient 850 pro tertia parte totius summe eorum, quos multiplicabo per 3, propter homines qui sunt tres, et erunt bizantij 2550 pro tota summa, et extraham $\frac{2}{5}$ de uno integro, remanebunt $\frac{3}{5}$, pro quibus accipiam $\frac{3}{5}$ de 2550, et superaddam bizantios 24, qui proueniunt ex 2 uicibus 3, uicibus 4, que sunt super uirgis, erunt 1554, et tot habuit primus. Et extraham $\frac{3}{10}$ de uno integro, remanebunt $\frac{7}{10}$ pro quibus accipiam $\frac{7}{10}$ de 2550, et superaddam 60, que proueniunt ex multiplicatione de

5, que sunt sub uirga, uicibus 3, uicibus 4, que sunt super uirgis, erunt 1845, de quibus accipiam $\frac{2}{5}$, hoc est multiplicabo 1845 per 2, et diuidam per 5, uel quintam de 1845, que est 369, multiplicabo per 2, quod est pulchrius, uenient 738, et tot habuit secundus. Rursus extraham $\frac{4}{17}$ de uno integro, remanebunt $\frac{13}{17}$, pro quibus accipiam $\frac{13}{17}$ de 2550, hoc est diuidam 2550 per 17, et quod prouenerit multiplicabo per 13, uenient 1950, super que addam 200, que proueniunt ex 5 uicibus 10, que sunt sub uirgis, uicibus 4, que sunt super uirga, erunt 2150, et tot habuit tertius homo, quando quadruplicauit bizantios reliquorum, et addidit ei quartam partem. Vnde si de bizantijs 2150 acceperimus $\frac{2}{5}$ ex tribus decimis eorum, hoc est $\frac{3}{25}$ ipsorum, uenient 258, et tot habuit tertius homo. Est enim hic modus similis secundo, quia cum hoc per secundum modum facere uoluimus, extrahemus 2 de 5, et 3 que restant, multiplicabo per 10 uicibus 17, uicibus 3, et habebo 1530, et hoc est accipere $\frac{3}{5}$ de 1550 (*sic*), et addam postea 24 super 1530, et habebo similiter pro bizantijs primj hominis 1554. Item extraham 3 de 10, et 7 que remanent ducam in 17 uicibus 5, uicibus 3, et habebo $\frac{7}{10}$ de 2550, et sic possumus eodem modo in similibus operarj.

Et quia quatuor inuenti numeri sunt sibi inuicem comunicantes, et est senarius comunis eorum mensura, si diuiserimus unumquemque eorum per 6, habebitur solutio huius questionis in minoribus numeris, et summa eorum erit 425, et bizantij primi erunt 259, Secundi 123, Tertij 43. *fol. 15 recto*

Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum, phylosophum domini Imperatoris.

Assiduis rogaminibus et postulationibus à quodam mihi amicissimo inuitatus, ut modum sibi componerem soluendi subscriptas auium et similium questiones, quia ipse tamquam nouiter in hoc magisterio educatus, fortiora pabula in libro meo numeri apposita pauescebat, lac sibi, uelut nouiter genito filio, suauitatis preparans, ut robustus effectus capere ualeat artiora, presentem sibi modum inueni, per quem, non solum similes questiones soluuntur, verum et omnes diuersitates consolaminum monetarum. Et quia ipsum in illa scientia prestantiorem et utilem elegi, uobis, reuerende pater domine Theodore, imperialis aule sume (*sic*) phylosophe, mictendum decrevi, ut ipso perlecto, que utilia sunt uestre celsitudinis probitas, resecatis superfluis, reconseruet.

De auibus emendis secundum proportionem datam.

Quidam emit passeres 3 pro uno denario, et turtures 2 pro uno denario, et columbam 1 pro denarijs 2, et ex his tribus generibus auium, habuit aues 30 pro denarijs 30. Queritur quot aues emit ex uno quoque genere. Posui primum passeres 30 pro 10 denarijs, et seruaui denarios 20, qui sunt differentia que est à 10 denarijs usque in 30, et mutaui unum ex passeribus in turturem, et fuit augmentum in ipsa mutatione $\frac{1}{6}$ unius denarij, quia passer uale-

bat $\frac{1}{3}$ unius denarij, et turtur ualebat $\frac{1}{2}$ unius denarij, scilicet $\frac{1}{6}$ unius denarij plus pretio passeris, et mutaui iterum unum ex passeribus in columbam, et melioratus sum in ipsa mutatione denarios $\frac{2}{3}$ 1, scilicet differentia que est à $\frac{1}{3}$ unius denarij usque in denarios 2, et feci sextas ex ipso denario $\frac{2}{3}$ 1, et fuerunt sexte 10. et secundum hoc opportuit me mutare passeres in turtures et columbas, donec ex ipsa mutatione proueniant il lidenarij 20, quos superius seruaui; quare ex ipsis feci sextas, et fuerunt sexte 120, quas diuisi in duas partes, quarum una posset diuidi per 10 integraliter, et alia per 1, et suma (*sic*) utriusque diuisionis non ascenderet in 30; et fuit prima pars 110, et alia 10, et diuisi primam partem, | scilicet 110, per 10, et secun- *fol 15 verso*
dam per 1, et habui columbas 11, et turtures 10, quibus extractis de auibus 30, remanserunt 9, pro numero passerum, qui passeres ualent denarij 3, et turtures 10 valent denarii 5, et columbe 11 ualent denarii 22, et sic ex istis tribus generibus auium habebuntur aues 30 pro 30 denarijs, ut quesitum est.

De eodem.

Et si uolumus habere aues 29 pro denarijs 29, eodem modo possumus operari, videlicet pretium 29 passerum, qui sunt aues uiliores, extrahemus de denarijs 29, et de reliquis faciemus sextas, et erunt sexte 116, quas diuidemus iterum in duas partes, quarum una diuidatur integraliter per 10, et altera per 1, et summa utriusque diuisionis non ascendat in 29, que partes dupliciter fieri possunt; primum ut prima pars sit 110, secunda 6, et

diuidantur 110 per 10, uenient columbe 11, et 6 diuidantur per 1, uenient turtures 6, quibus extractis de 29, remanent 12 pro numero passerum, uel 116 diuidemus in 100 et in 16, et diuidemus 100 per 10, et 16 per 1, et habebimus columbas. 10, et turtures 16, relique que sunt usque in 29, scilicet 3, erunt passeres, et sic soluta est hec questio dupliciter.

Item de auibus.

Et si uolumus habere aues 15 pro denarijs 15, hoc esse non posse sine fractione auium demonstrabo. Verbi gratia si extraxero pretium 15 passerum de denarijs 15 et de residuis denarijs faciam sextas, que sunt 60, non poterunt diuidj in duas partes, quarum una diuisa per 10 et altera per 1 ueniat numerus integer ex ipsis duabus diuisionibus, qui sit minor de 15. exempli causa si diuisero 60 in 50 et in 10, et diuisero 50 per 10, et 10 per 1, uenien te (*sic*) ex ipsis duabus diuisionibus 5 et 10, quibus insimul iunctis faciunt 15, scilicet summa omnium auium, et sic non caderet aliquis passer in hac emptione, quia columbe 5 ualent drenarios 10, et turtures 10 ualent denarios 5, et sic, ex his duobus generibus auium tantum, habentur aues 15 pro denarijs 15, et non est numerus aliquis alius infra 60 maior quam 50, qui integraliter diuidatur per 10, et minor eo hic locum non habet, quia si poneremus 40 pro una parte, remanent pro alia parte 20, unde si 40 diuidantur per 10, et 20 per 1, egrederentur ex infrascriptis duabus diuisionibus 24 aues, que locum non habent, cum debeant esse 15. Sed si uolemus frangere aues, diuidemus 60 su-

pradicta in 55, et in 5, et diuidemus 55 per 10, uenient columbe $\frac{1}{2}$ 5, et diuidemus 5 per 1, uenient turtures 5. Extraetis itaque columbis $\frac{1}{2}$ 5 et turturibus 5 de auibus.| 15 remanabunt passeres $\frac{1}{2}$ 4, quorum pretium est de- *fol. 16 recto* narius 1 et semis, et pretium 5 turturum est denarij $\frac{1}{2}$ 2, et pretium columbarum $\frac{1}{2}$ 5 est denarij 11, et sic ex his tribus generibus auium habentur aues 15 pro denarijs. 15.

Et si uolumus habere aues 15 pro denarijs 16, hoc integraliter poterit, quia extraetis denarijs 5, scilicet pretium passerum 15, de denarijs 16, remanent denarij 11, qui sunt sexte 66, quibus diuisis in 60 et in 6, diuidetur 60 integraliter per 10, et 6 per 1, et ex ipsis diuisionibus uenient columbe 6 et turtures 6, relique que sunt usque in 15, scilicet 3, sunt passeres, et sic possumus in omnibus similibus operari. Sed ut ea que dixi liquidius sapientia uestra intelligat, aliam huiusmodi proponam questionem. Videlicet ut passeres 3 dentur pro uno denario, et columba ualeat denarios 2, et perdix ualeat denarios 3, et uolo ex his tribus generibus auium aues 30 pro denarijs 30 habere. Extraham quidem supradicto modo de denarijs 30 pretium passerum 30, quod est 10, remanebunt denarij 20, quos seruabo, et mutabo unum ex passeribus in columbam, et erit melioratio denarius $\frac{2}{3}$ 1, scilicet 5 tertie unius denarij, et mutabo iterum alium passerem in perdicem, et erit melioratio eius denarij $\frac{2}{3}$ 2, hoc est tertie 8, que sunt differentia que est à pretio unius passeris usque in pretium unius perdicis, et faciam tertias ex denarijs 20 seruatis, et erunt tertie 60, quas diuidam in duas partes, quarum una diuidatur integraliter per 8, et alia per 5, et que ex utraque diuisione peruenerint non ascendant in 30; eritque una illarum duarum par-

tium 40, et altera 20, et diuidam 40 per 8, uenient perdices 5, et diuidam 20 per 5 uenient columbe 4, relique que sunt usque in 30, scilicet 21, sunt passeres.

Item passeres 5 ualent denarium 1, et turtures 3 dentur pro uno denario, et columba ualeat denarios 2, et perdix ualeat denarios 3, et uolo ex his quatuor generibus auium habere aues 24 pro denarijs 24. Ponam pretia uniuscuiusque generis auium in ordine, videlicet $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$ et 2, et 3, ut in margine cernitur, et extraham pretium unius passeris de pretio cuiusque reliquorum trium generum, scilicet $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{3}$ et de 2, et de 3, et residua ponam super ipsa pretia per ordinem, et habebo $\frac{2}{15}$ super $\frac{1}{3}$, et $\frac{4}{5}$ 1, scilicet $\frac{27}{15}$, super 2, et $\frac{4}{5}$ 2, scilicet $\frac{42}{15}$, super 3; deinde pretium 24 passerum extraham de denarijs 24, remanebunt denarij $\frac{1}{5}$ 19, quos multiplicabo per 15, ut faciam ex eis quindecimas, sicut sunt differentie suprascripte, erunt $\frac{0}{15}$ 288, quas diuidam in tres partes, fol. 16 verso quarum | una integraliter diuidatur per 42, et altera per 27, et tertia per 2, quia melioratio mutationis unius passeris in perdicem est $\frac{42}{15}$, et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{15}$. et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{15}$. et melioratio mutationis passeris in turturem est $\frac{2}{15}$, et ideo diuidende sunt $\frac{0}{15}$, 288 in tres partes, quarum una diuidatur integraliter per 42, secunda per 27, tertia per 2. et quod ex ipsis tribus diuisionibus prouenerit cadat infra numerum auium emptarum, scilicet infra 24, quod poterit fierj dupliciter; primum de 288 extraham quadruplum de 42, et de 27, scilicet 168 et 108, que sunt in summa 276, et remanebunt pro tertia parte 12, et diuidam 168 per 42, et 108 per 27, et 12 per 2, uenient perdices 4, et columbe 4, et turtures 6, que sunt in summa aues 14, relique que sunt

usque in 24, scilicet 10, erunt passeres. Vel aliter ponam pro prima parte quincuplum de 42, pro quo habebuntur perdices 5, et pro secunda parte ponam duplum de 27, pro quo habebuntur columbe 2, et ex ipsis 288 remanebunt 24, que sunt duodecuplum de 2, pro quo duodecuplo habebuntur turtures 12, relique uero que sunt usque in 24 aues, scilicet 5, erunt passeres; et sic possumus in similibus etiam et in consolamine monetarum et bizantiorum operari, quod quandocumque vel placuerit dominationi uestre liquidius declarabo.

De compositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurium datum.

Libet etiam solutionem subscriptae questionis, quam nuper inueni lime uestre correctionis transmittere. Videlicet cum in triangulo equicrurio noto protractum sit pentagonum equilaterum, qualiter inueniatur longitudo ipsius lateris demonstrabo. Esto trigonum *a b c* (1), cuius unum quodque latus *a b* et *a c* sit 10, mensura et basis *b c* sit 12, et in ipso trigono protractum sit pentagonum equilaterum *a. d. e. f. g*, et uolo inuenire longitudinem uniuscuiusque lateris pentagonj; protraham primum in triangulo *a b c* perpendicularem *a h*, que erit nota, cum nota sint latera *a b* et *b h*, et erit longitudo eius 8, et à puncto *d* super latus *b c* protraham cathetum *d i*, que equidistabit catheto *a h*; quare triangulus *d b i* similis est triangulo *a b h*, quare proportio *i b* ad *b d* est sicut proportio *h b* ad *b a*, nec

(1) Vedi fig. 6.

non et proportio *i d* ad *d b* est sicut proportio *h a* ad *a b*; sed *h a* ex *a b* est $\frac{4}{5}$, quare et *i d* est $\frac{4}{5}$ ex *d b*. Et est *b h* ex *b a* $\frac{3}{5}$, cum *b a* sit 10, et *b h* sit 6, scilicet me-
fol 17 recto dietas | ex *b c*, erit et *i b* ex *b d* $\frac{3}{5}$. Et quia latera pentagonj *a d* et *a g* sunt sibi inuicem equalia, si auferatur *a d* ex *a b*, et *a g* ex *a c*, remanebunt recte *d b* et *g c* sibi inuicem equales; sunt enim *g f* et *d e* equales; due ergo recte *g c* et *g f* duabus *b d* et *d e* sunt equales, et angulus *f c g* angulo *e b d* est equalis, cum equicrurium sit trigonum *a b c*; quare basis *b e* basi *c f* est equalis, est enim *b h* equalis *c h*: unde si ex *b h* auferatur *b e*, et ex *c h* auferatur *c f*, remanebit *f h* equalis *h e*. His itaque omnibus intellectis, ponam unum quodque latus pentagonj rem, et erit *e h* medietas rei; quare *b e* erit 6 minus medietate rei, et auferam *a d* ex *a b*, scilicet rem de 10, remanebit *d b* 10 minus re, de quibus accipiam $\frac{4}{5}$, et habebo pro catheto *d i*. 8 minus $\frac{4}{5}$ rei. Et accipiam rursus $\frac{3}{5}$ ex *d b*, et habebo 6 minus $\frac{3}{5}$ rei pro linea *b i*, est enim et *b e* 6 minus medietate rei: quare si auferamus *b i* ex *b e*, remanebit *i e* $\frac{1}{10}$ rei, et sic erunt latera triangolj *d e i* nota, et quia angulus *d i e* est rectus, erunt quadrata laterum *d i* et *i e* equalia quadrato linee *d e*, quod quadratum est census, cum *d e* sit res; quare multiplicabo *d i*, scilicet 8 minus $\frac{4}{5}$ rei in se, uenient dragme 64 et $\frac{16}{25}$ census, minus rebus $\frac{4}{5}$ 12, et multiplicabo *i e*, scilicet $\frac{1}{10}$ rei in se, et ueniet $\frac{1}{100}$ census, quam addam super $\frac{16}{25}$ census et dragmis 64, diminutis rebus $\frac{4}{5}$ 12, et habebo $\frac{13}{20}$ census et dragmas 64, diminutis rebus $\frac{4}{5}$ 12, que equantur censui, scilicet quadrato lateris *d e*: unde si addidero utrique parti res $\frac{4}{5}$ 12, et tollam ab utraque parte $\frac{13}{20}$ census, remanebunt $\frac{7}{20}$ census et res $\frac{4}{5}$ 12,

que equantur dragmis 64. Et ut hec reducantur ad censum unum, multiplicanda sunt omnia que habentur per $\frac{6}{7}$ 2, et erit census et res $\frac{4}{7}$ 36, que equantur dragmis $\frac{5}{7}$ 182, et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebre. Vnde si ad . solutionem quesiti liquidius uenire uolumus, ponam pro censu quadratum *k l m n* (1), cuius unumquodque latus sit equale lateri pentagoni supradicti, et ducam secundum rectitudinem latera *k n* et *l m* in puncta *p o*, et sit unaqueque rectarum *n p* et *m o* $\frac{4}{7}$ 36, et diuidatur recta *m o* ad punctum *q* in duo equa, et erit *m q* $\frac{2}{7}$ 18; et quoniam quadratum *k m* est census, erit latus *m n* res, et unumquodque laterum *n p* et *m o* est $\frac{4}{7}$ 36; quare tota superficies *n o* est res $\frac{4}{7}$.36, cui superficiei si addatur quadratum *k·m*, erit tota superficies rectiangula *k o* | census et res $\frac{4}{7}$ 36, que, ut superius inuenctum est, equantur dragmis $\frac{5}{7}$ 182: ergo superficies *k o* est dragme $\frac{5}{7}$ 182; que superficies prouenit ex *k l* in *l o*, sed *k l* equalis est recte *l m*, ergo ex ductu *l m* in *l o* proueniunt $\frac{5}{7}$ 182, quibus si addatur multiplicatio ex *m q* in se, hoc est ex $\frac{2}{7}$ 18, egredientur $\frac{11}{49}$ 517 pro quadrato linee *l q*, de quorum radice, que est secundum propinquitatem 22 et minuta 44 et secunda 33 et tertia 15 et quarta 7, si auferatur linea *m q*, scilicet $\frac{2}{7}$ 18, remanebunt pro quantitate rei *l m*, hoc est pro quantitate unius cuiusque lateris pentagonj, 4 et minuta 27, et, secunda 24, et tertia 40, et quarta 50. Inueni etiam his diebus alias solutiones super similibus questionibus, quas dominationi uestre quandocumque placuerit destinabo. fol. 17 verso

(1) Vedi fig. 7.

Modus alius soluendi similes questiones.

Item pono solutionem sequentis questionis per quemdam pulchrum modum. Nam questio talis est. Quinque homines denarios habent, ex quibus primus cum medietate denariorum secundi habet 12. Secundus cum $\frac{1}{3}$ denariorum tertij hominis habet 15. Tertius cum $\frac{1}{4}$ denariorum quartj habet 18. Quartus cum $\frac{1}{5}$ denariorum quintj habet 20. Quintus cum $\frac{1}{6}$ denariorum primj habet 23. Ponam hos quinque homines in ordinem, et sub unoquoque ponam suam petitionem, ut hic cernitur.

15760	11268	10161	7428	4938
23	20	18	15	12
Quintus,	Quartus,	Tertius,	Secundus,	primus,
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{7}\frac{88}{103}$ 21	$\frac{3}{7}\frac{64}{103}$ 15	$\frac{4}{7}\frac{9}{103}$ 14	$\frac{3}{7}\frac{37}{103}$ 10	$\frac{3}{7}\frac{87}{103}$ 6

Et incipiam à 2, qui sunt sub uirga primi hominis, et multiplicabo 2 per 12, qui sunt super ipsum primum, erunt 24, de quibus tollam multiplicationem de 1, quod est super 2, in 15, remanebunt 9, que multiplicabo per 3, que sunt sub uirga secundi hominis, erunt 27, quibus addam multiplicationem de 1, quod est super 2, in 1 quod est super 3, ductam in 18, que sunt super tertium hominem, erunt 45, que ducam in 4 que sunt sub uirga eiusdem tertij hominis, erunt 180, de quibus tollam id quod prouenit ex ducto 1, quod est super 2, in 1 quod est super 3, in 1 quod est super 4, quod in 20, rema-

nebunt 160, que ducam in 5, que sunt sub uirga quarti hominis, erunt 800, quibus addam 23, que proueniunt ex ducto 1 quod est super 2, in 1 quod est super 3, | quod fol. 18 recto in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 23, erunt 823, que multiplicabo per 6, que sunt sub uirga quintj hominis, erunt 4938, que seruabo super primum hominem, et operabor similiter in reliquis quatuor hominibus, uidelicet multiplicabo 3, que sunt sub uirga, per 15, et tollam semel 18, et residuum multiplicabo per 4, erunt 108, quibus addam multiplicationem de 1 quod est super 3, in 1 quod est super 4, ductam in 20, erunt 128, que ducam in 5, et tollam 23, que ueniunt ex uno quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 23, remanebunt 617, que ducam in 6, que sunt sub uirga quinti hominis, erunt 3702, quibus addam 12, que proueniunt ex 1, quod est super 3, in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, quod in 12, erunt 3714, que ducam in 2, que sunt sub uirga primj hominis, erunt 7428, que seruabo super secundum hominem. Rursus multiplicabo 4, que sunt sub uirga, per 18, et tollam semel 20, residuum multiplicabo per 5, et addam 23, que proueniunt ex 1, quod est super 4, in 1 quod est super 5, quod in 23, et totum illud multiplicabo per 6, que sunt sub uirga, erunt 1698, de quibus tollam 12, que proueniunt ex 1, quod est super 4, in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, quod in 12, remanebunt 1686, que ducam in 2, que sunt sub uirga, erunt 3372, quibus addam 15, que proueniunt ex 1 quod est super 4, in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, quod in 1 quod est super 2, quod in 15, quod in

15 (*sic*), erunt 3387, que ducam in 3, que sunt sub uirga, erunt 10161, que seruabo super tertium hominem. Et cum eodem modo operatus fuero in inuenctione quartj et quintj numeri, habebo super quartum hominem 11268, et super quintum 15760: deinde multiplicabo 2 per 3, que per 4, que per 5, que per 6 que sunt sub uirgulis, erunt 720, et multiplicabo 1, quod est super 2, in 1 quod est super 3, quod in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, uenient 1, quod addam cum 720, cum propositorum hominum numerus sit inpar, quia si esset par tolleretur, erunt 721, in quorum regula, que est $\frac{1}{7}$ de 103, diuidendi sunt suprascripti numeri per ordinem, et habebo quantitates uniuscuiusque eorum, ut superius in questione cernitur.

Inuestigatio unde procedat inuentio suprascripta.

fol 18 verso Et si unde talis inuentio procedat | habere uolueritis, uobis illud, tanquam domino uenerando, mittere procurabo. Soluuntur etiam similes questiones aliter, ut in libro meo denominato uestra Sapientia poterit inuenire. Et si super denarios unius cuiusque adderetur eadem pars denariorum reliquorum quatuor hominum, que additur in dicta questione unicuique de suo consequente, et haberet primus 12, Secundus 15, et cetera ut supra, tunc questio esset insolubilis, nisi concederetur primum habere debitum, quod debitum esset $\frac{97}{137}$ 13. Et Secundus haberet $\frac{1}{2}\frac{148}{137}$ 3. Tertius $\frac{99}{137}$ 11. Quartus $\frac{1}{2}\frac{129}{137}$ 15. Quintus $\frac{20}{137}$ 20.

Incipit liber quadratorum compositus à leonardo pisano. Anni. M. C̣C. XXV. fol. 19 recto

Cvm Magister dominicus pedibus celsitudinis uestre, princeps gloriosissime domine. F., me pisis duceret presentandum, occurrens Magister Johannes panọrmitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem; vt inuenirem numerum quadratum, cui quinque additis uel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur: super cuius questionis solutione á me iam inuenta considerans, uidi quod habebat originem solutio ipsa ex multis que quadratis et inter quadratos numeros accidunt. Nuper autem cum relationibus pisis positis, et aliorum reddeuntium ab imperiali curia, intellexerim quod dignatur uestra sublimis maiestas legere super librum quem composui de numero, et quod placet uobis audire aliquotiens subtilitates ad geometriam et numerum contingentes, rememorans in uestra curia, et a uestro phylosopho su-

prascriptam mihi propositam questionem, ab ea sumpsi materiam, et opus incepi ad uestrum honorem condere infrascriptum, quod uocari librum uolui quadratorum, ueniam postulans patienter, si quid in eodem plus uel minus iusto uel necessario continetur, cum omnium habere memoriam, et in nullo peccare, sit diuinitatis potius quam humanitatis, et nemo sit uitio carens, et undique circumspectus.

Consideravi super originem omnium quadratrorum numerorum, et inueni ipsam egredi ex ordinata imparium ascensione. Nam unitas quadrata est, et ex ipsa efficitur primus quadratus, scilicet unum, cui unitati addito ternario facit secundum quadratum, scilicet 4, cuius radix est 2, cui etiam additioni si addatur tertius impar numerus, scilicet 5, tertius quadratus procreabitur, scilicet 9, cuius radix est 3, et sic semper per ordinatam imparium collectionem ordinata consurgit et series quadratorum. Vnde cum uolumus II.os quadratos numeros inuenire, quorum additio faciat quadratum numerum, accipiam qualem uoluero quadratum imparem, et habebo ipsum pro uno ex duobus dictis quadratis, reliquum inueniam ex collectione omnium imparium, qui sunt ab unitate usque ad ipsum quadratum imparem. Verbi gratia, accipiam 9 pro uno ex dictis duobus quadratis, reliquus habebitur ex collectione omnium imparium qui sunt sub 9, scilicet de 1 et 3 et 5 et 7, quorum summa est 16, qui est quadratus, quo addito cum 9 egredientur 25, qui numerus est quadratus. Et si geometrica uti uolumus demonstratione, adiaceant quotcumque numeri impares ab unitate

per ordinem ascendendo, donec extremus eorum quadratus fiat, et sint (1) $a\,{}^{1}b$, $b\,{}^{3}c$, $c\,{}^{5}d$, $d\,{}^{7}e$, $e\,{}^{9}f$, et sit $e\,{}^{9}f$ quadratus, et quoniam $e\ f$ est quadratus, et $a\,{}^{16}e$ est quadratus, cum procreetur ex ordinata collectione imparium $a\ b$ et $b\ c$ et $c\ d$ et $b\ e$, et totus $a\,{}^{25}f$ numerus est similiter quadratus; et sic ex duobus quadratis $a\ e$ et $e\ f$ fit quadratus $a\ f$.

Item aliter accipiam aliquem quadratum parem, cuius medietas sit par | ut 36, cuius medietas est 18, et auferam ab eo, et addam eidem 1, egredientur 17 et 19, qui sunt impares numeri et continui, cum nullus impar numerus cadat inter eos: ex horum quoque addictione progreatur (*sic*) 36, qui est quadratus, et ex addictione reliquorum imparium, qui sunt ab uno usque in 15, procreatur 64, ex quibus duobus quadratis procreatur 100, qui est quadratus, et procreatur ex collectione imparium numerorum qui sunt ab uno usque in 19. (2). Vel accipiam quadratum

fol. 19 verso

(1) Vedi Fig. 8.

(2) Nel margine laterale esterno ed inferiore del rovescio della carta 19 del Codice Ambrosiano *E.* 75. *Parte superiore*, si legge:

« *Ad inueniendum plures quadratos numeros.*

« Ex hac regula de collectione duorum numerorum quadratorum possumus recolligere plures numeros quadratos; et ut hec aperte uideamus, uolumus colligere 5 quadratos numeros, quorum primus et secundus simul iuncti faciant quadratum numerum, et super eorum tertio addito eueniat quadratus numerus, et etiam super addictionem predictorum trium, quarto numero addito, fiat quadratus numerus, et superaddito quinto fiat quadratus numerus. Ita exerceamus: ponamus primus numerus eorum 9, et per dictam regulam inueniemus secundum numerum isto modo, quod

numerum imparem, cuius tertia pars sit integra, ut 81, cuius tertia est 27, et accipiam ipsum 27 cum duobus imparibus numeris, quibus ipse est medius, scilicet 25 et 29, et hi tres numeri coniuncti faciunt 81, qui est quadratus, et ex aliis, qui sunt ab uno usque in 23, egredientur 144, cuius radix est 12: additis ergo 144 cum 81, exit summa collectionis imparium numerorum, qui sunt ab uno usque in 29, scilicet 225, qui numerus est quadratus, et est eius radix 15. Simili quoque modo possunt inueniri quatuor, et plures continui impares numeri, ex quorum collectione procreatur quadratus numerus, et

« colligemus omnes impares numeros qui sunt ab 1 usque in 9, qui nu- « meri impares sunt isti 1, 3, 5, 7, et omnes insimul additi faciunt 16 « pro secundo quadrato; ita quod si addideris cum 9, habebis 25; et per « suprascriptum modum potest inueniri tertius quadratus, quod ponebis « in margine omnes quatuor impares numeros, qui sunt ab 1 usque in 25, « qui sunt 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, et omnes additi faciunt « 144 pro tertio numero quadrato, et adde cum summa predictorum duo- « rum quadratorum, que est 25, habebis 169 pro summa trium quadra- « torum, et isto modo inuenies quartum quadratum, ponendo omnes im- « pares, qui sunt ab 1 usque in 169, et inuenies quartum quadratum « esse 7056, et summa predictorum trium numerorum superaddita, que « est 169, erit eorum summa 7225, et isto modo, et ex predicta suma (*sic*) « potest inuenirj quintus quadratus, ponendo omnes impares numeros qui « sunt ab 1 usque in 7225, et inuenies pro quinto quadrato eorum 13046544, « cui quinto numero si addideris sumam (*sic*) predictorum quatuor, ha- « bebis pro suma (*sic*) omnium 5 numerorum quadratorum 13053769, et « isto modo poteris plures quadratos numeros inuenire ».

Il seguente segno ⩨ trovasi presso la prima parola di questo passo del Codice Ambrosiano sopraccitato a sinistra di chi legge, nel margine laterale esterno della suddetta carta 19 *verso* di questo Codice. Un segno al tutto simile trovasi anche sopra le tre prime lettere della parola *accipiam* nella linea sesta della medesima carta 19 *verso*.

ex reliquis, qui sunt sub ipsis usque ad unitatem, procreabitur alius quadratus, et ipsi duo quadrati facient semper quadratum numerum. Similiter inuenj unum quemque quadratum excedere ipsum quadratum, qui ante eum est immediate secundum quantitatem addictionis radicum ipsorum. Verbi gratia; 121, cuius radix est 11 excedit 100, cuius radix est 10, secundum quantitatem addictionis de 10 et 11, scilicet radicum ipsorum. Quare unusquisque quadratus excedit secundum quadratum ante ipsum, secundum quantitatem quadrupli radicis quadrati, qui est in medio eorum, ut 121, qui excedit 81 in quadruplum de 10; et sic possunt inuenirj differentie que sunt inter quadratos per distantiam radicum ipsorum. Et quando due continue radices aggregate faciunt quadratum numerum, tunc quadratus maioris radicis equabitur duobus quadratis. Similiter quando quadruplum alicuius radicis est quadratus, tunc quadratus sequentis radicis equabitur duobus quadratis, quorum unus erit ille qui creatus est ex quadruplo predicto, et alius est, cuius radix est uno minus radice quadruplicata; vt si quadruplicetur 9, egredietur 36. Ergo 100, cuius radix est 10, equatur 64, cuius radix est 8, et 36 qui fuit quadruplum de 9. Et nota, quia ex quadruplicatione alicuius numeri non egredietur quadratus, nisi ipse fuerit quadratus, quia, ut Euclides ostendit, cum proportio numeri ad numerum est sicut proportio quadratorum, tunc factus ex multiplicatione eorum quadratus eorum; et quia 4 quadratus est, oportet ut fiat quadratus ille numerus quem multiplicat, ut factus ex eis sit quadratus. Et sic possumus multimode

tres quadratos numeros inuenire, quorum unus semper equabitur reliquis aggregatis. Sed unde oriatur omnem
fol. 20 recto quadratum excedere | quadratum antecedentem sibi, secundum quantitatem addictionis radicum ipsorum, ut diximus, patebit si radices eorum ponamus in lineas *a b* et *b g* (1). Et quoniam *a b* et *b g* sunt numeri continui, erit unus eorum maior alio 1. Sit ergo *b g* uno plus quam *a b*, et auferatur ex *b g* unitas *d g*, remanebit *b d* equalis *b a*; et quoniam *b g* numerus diuisus est in duo, scilicet in *b d* et *d g*, erit multiplicatio *b d* in se cum *d g* in se, et cum duplo *d g* in *b d*, equalis multiplicationi *b g* in se. Sed multiplicatio *b d* in se equatur multiplicationi *a b* in se. Ergo quadratus qui fit a numero *b g* superhabundat eum, qui fit a numero *a b*, secundum quantitatem multiplicationis *g d* in se, et dupli *g d* in *b d*. Sed multiplicatio *d g* in se est unvs, qui est equalis unitati *d g*, uel est eadem, et multiplicatio dupli *d g* in *b d* facit duplum ex *b d*, cum *d g* sit 1, ergo duplum *b d* est *a d*; ergo quadratus, qui fit á numero *b g*, excedit quadratum; qui fit á numero *a b*, secundum quantitatem addictionis radicum eorum, que sunt *a b*, et *b g*, quod opportebat ostendere.

Aliter: quoniam *b d* (2) numerus equatur numero *b a*, erit totus *a d* diuisus in duo equa super punctum *b*, cui addita est unitas *d g*, erit ergo multiplicatio *d g* in *a g*, cum quadrato qui fit a radice *a b*, equalis quadrato qui fit a

(1) Vedi Fig. 9.
(2) Vedi Fig. 10.

radice *b g*; quare quadratus, qui fit á numero *b g*, excedit quadratum qui fit á numero *a b*, secundum id quod fit ex ductu *d g* in *a g*. Sed *d g* in *a g* facit numerum *a g*, cum *d g* sit unum. Ergo quadratus *b g* excedit quadratum, qui fit ab *a b*, secundum addictionem radicum ipsorum, que addictio est numerus *a g*. Similiter ostendetur omnem quadratum excedere omnem quadratum minorem sui, secundum multiplicationem superhabundantiae radicum ipsorum in addictionem utriusque radicis. Verbi gratia, sint due radices duorum quorumlibet quadratorum *a g* et *g b* (1), et sit *g b* maior quam *a g*, secundum numerum *d b*. Quare multiplicatio *a g* in se, cum *d b* in *a b*, equatur multiplicationi *g b* in se; ergo quadratus, qui fit a numero *g b*, excedit quadratum, qui fit ab *a g*, in id quod radix *g b* excedit radicem *a g* ductum in utramque radicem, scilicet in hoc quod fit ex ductu *d b* in *a b*, quod opportebat ostendere.

Est enim alius modus inueniendi duos quadratos fatientes coniunctum ex eis numerum quadratum, qui in x° euclidis reperitur. Adiaceant duo quadrati numeri simul pares uel impares *a b*, *b g* (2): quare compositum ex eis *a g* erit par; et esto *a b* maior quam *b g*, et diuidatur *a g* in duo equa secundum *d*. Numerus ergo integer est *a d*, cum sit medietas numeri *a g*. Et extracto *a d* ex *a b* numero, remanebit *d b* numerus integer. Et quoniam *a g* numerus diuisus est equaliter | et inequaliter in *d b*, erit multiplicatio *a b* in *b g* cum quadrato qui fit á numero *d b*, fol. 20 verso

(1) Vedi Fig. 11.
(2) Vedi Fig. 12.

equalis quadrato qui fit á numero $d\,g$; sed id quod fit ex ductu $a\ b$ in $b\ g$ quadratus est, cum quadrati sint numeri $a\ b$ et $b.g$, quadratus est etiam id quod fit á numero $d\,b$; et sic inuenti sunt duo quadrati facientes coniunctum ex eis quadratum numerum, ipsum videlicet qui fit á numero $d\ g$, quod opportebat facere.

Volo demonstrare quare ex ordinata imparium collectione, ab uno incipiendo in infinitum egrediatur ordinata series quadratorum: adiaceant numeri continui ab unitate A quotcumque $b\,g$, $g\,d$, $d\,e$, $e\,z$, $z\,i$ (1), et componatur $b\,g$ cum A unitate, et egrediatur numerus t; similiter componatur unusquisque numerus cum suo antecedente et cum suo sequente, et sit compositus numerorum $b\ g$ et $g\ d$ numerus k, numerorum uero $g\,d$ et $d\,e$ numerus L, numerorum autem $d\ e$ et $e\ z$ numerus M, ipsorum videlicet qui sunt $e\ z$ et $z\ i$ numerus N: dico primum numeros t, k, l, m, n impares esse, et continuos ab unitate; numerus enim $z\ i$ aut par est aut impar: si par est numerus $z\ i$, impar est numerus $e\ z$, et si impar est numerus $z\ i$, par est numerus $e\ z$, continui enim sunt. Quare compositus numerorum $e\ z$, $z\ i$, scilicet n, est impar. Similiter ostendemus, compositum numerorum $d\,e$, $e\,z$, scilicet m, imparem esse. Eodemque modo, numeros $l\,k\,t$ impares esse monstrabuntur: dico quidem continuos impares esse numeros t, k, l, m, n. Ex coniuncto quidem $e\,z$ cum $z\,i$ factus est numerus n, et ex coniuncto $d\ e$ cum $e\ z$, factus est numerus m. Quot ergo superhabundat numerus $z\ i$ numerum $d\,e$, tot superhabundat numerus n

(1) Vedi Fig. 13.

numerum *m*. Superhabundat enim *z i* numerum *e z* in uno, in quo etiam numerus *e z* superhabundat. numerum *d e*. Ergo numerus *z i* superhabundat numerum *d e* in duobus. Quare numerus *n* superhabundat numerum *m* similiter in duobus, in quibus etiam inuenietur eodem modo numerum *m* superhabundare numerum *l*, et numerum *l* numerum *k*, et numerum *k* numerum *t*, et numerum *t* unitatem *A*: continui ergo impares sunt ab unitate numeri *t*, *k*, *l*, *m*, *n*, ut prediximus.

Et, ut ostensum est superius, quadratus qui fit a numero *z i* excedit quadratum qui fit á numero *e. z*, in numero qui fit ex coniuncto *e z*, *z i*, hoc est in numero *n*. Similiter ostendetur quadratus, qui fit á numero *e z*, superhabundare quadratum, qui fit á numero *d e*, in coniuncta numerorum *d e*, *e z*, hoc est in numerum *m*. Et quadratus, qui fit á numero *d e*, superhabundat quadratum, qui fit á numero *g d*, secundum numerum *l*. Et quadratus, qui fit a numero *g d*, superhabundat quadratum, qui fit á numero *b g*, secundum *k*, et quadratus á numero *b g* superhabundat quadratum unitatis, secundum numerum *t*; est enim *t* ternarius, et *b g* est binarius: ergo si super quadratum unitatis, hoc est super 1, addatur numerus *t*, in quo quadratus numeri *b g* superhabundat quadratum unitatis, ueniet quadratus numeri *b g*, super quem addito numero *k*, ueniet quadratus numeri *g d*, super quem quadratum | si addatur numerus *l*, ueniet quadratus numeri *d e*, super quem quadratum si addatur numerus *m*, ueniet quadratus numeri *e z*, super quem iterum si addatur numerus *n*, in quo quadratus numeri *z i* superhabundat quadratum numeri *e z*, manifeste ueniet quadratus numeri *z i*. Sunt enim numeri *A*, *b g*, *g d*, *d e*,

fol. 21 recto

e z, *z i* continui, et eorum quadrati surgunt ex collectione continua impari numerorum *a*, *t*, *k*, *l*, *m*, *n*, vt oportebat ostendere.

Inuenire duos numeros, quorum quadrati insimul iuncti faciunt quadratum factum ex coniunctione quadratorum duorum aliorum numerorum datorum. Sint dati duo numeri *a* et *b* (1), quorum quadrati insimul iuncti faciant quadratum numerum *g*: oportet duos alios numeros inuenire, quorum quadrati insimul coniuncti faciant equale numero *g* quadrato. Inueniantur alij duo numeri, quorum quadrati insimul iunctj faciant quadratum numerum, ex mensura quorum faciant recte *d e*, *e z*, et componantur facientes angulum rectum, ipsum videlicet qui est sub *d e z*, latus quoque *d z* potest super latera *d e*, et *e z*, quadratum quidem, qui fit á recta *d z*, aut est equalis numero *g*, aut non: esto prius equalis; inuenti sunt ergo duo alij numeri, quorum quadratj coniuncti faciunt quadratum numerum equalem numero *g*, quorum unus est equalis recte *d e*, alter est equalis recte *e z*. Si autem quadratus qui fit á recta *d z*, hoc est á numero *d z*, non est equalis numero *g*, erunt itaque maior ipso, uel minor: esto prius maior; et quoniam quadratus, qui fit á numero *d z*, maior est numero *g*, erit numerus *d z*, maior radice *g*. Accipiatur ergo, radix numeri *g*, que sit *i* numerus, et accipiatur equalis *I* á numero *d z*, fitque *t z*; et á puncto *t* super rectam *e z*; cathetus protrahatur *t k*; equidistans ergo est *t k* recte *d e*. Quare triangulus *t k z* similis est triangulo *d e z*; est ergo sicut *z d* ad *z t*, ita *d e* ad *t k*. Sed proportio *z d* ad *z t*

(1) Vedi Fig. 14.

est nota, raciocinate enim sunt ambe. Quare et proportio *d e*, ad *t k* erit similiter nota. Et cum *d e* sit raciocinata, Quare erit et recta *t k* etiam numerata. Similiter ostenditur rectam *z k* esse raciocinatam, cum proportio eius sit ad *z e* sicut *z t* ad *z d*; numerate ergo sunt *t k* et *k z*, quorum quadrati insimul coniuncti faciunt quadratum qui fit á recta *t z*. Sed numerus quadratus qui fit á numero *t z*, equalis est ei qui fit á numero *I*, radix enim est numerus *I* numeri *g*. Ergo quadratus qui fit á *t z*, equalis est numero *g*; inuenti sunt enim duo numeri *t k* et *k z*, quorum quadrati insimul coniuncti faciunt equale quadrato numero *g*. Rursus sit minor *d z* quam *I*, et protra | hatur recta *z d* usque ad *l* (1), ut sit *z l* fol. 31 verso equalis numero *I*. Similiter protrahetur *z e* in *m*, et copuletur *l m*, et sit equidistans *l m* recte *d e*, quoniam similis est triangulus *d e z* triangulo *l m z*, et est nota proportio *z d* ad *z l*; erunt ergo noti numeri *z m* et *m l*; inuencti ergo sunt duo numeri *l m* et *m z*, quorum quadrati coniuncti faciunt quadratum equalem numero *g*, cum *l z* sit equalis radici eius, quod opportebat facere.

Et ut hec in numeris habeantur, sit *a*. 5 et *b*. 12, quare *g* qui est coniunctum ex quadratis numerorum *a b* est 169, et eius radix, scilicet *I*, est. 13, et adiaceant due linee *d e*, et *e z* angulum rectum continentes, qui est *d e z*, et sit recta *d e*. 15, et *z*. 8, quare *d z* erunt. 17, et sumpta est in recta *d z* recta *z t* equalis *I*, est ergo *z t*. 13, et producta est recta *t k* equidistans recte *d e*, quare est sicut *z d* ad *z t*, ita *d e* ad *t k*; multiplicabis ergo *z t*

(1) Vedi Fig. 15.

in $d e$, hoc est 13 per 15, et diuides sumam (*sic*) per $d z$, hoc est per 17, exibit numerus $t k$ $\frac{2}{17}$ 11. Similiter si multiplicaueris $z t$ per $z e$, et diuiseris per $z d$, exibit $k z$ $\frac{2}{17}$ 6; et sic inuencti sunt duo numeri, scilicet $t k$ et $k z$, quorum quadrati coniuncti faciunt numerum g, hoc est quadratum qui fit á $z t$. Similiter ostendetur si numerus $d z$ fuerit minor l, ut in alia figura, in qua ponemus ut sit $d e$. 4, et $e z$. 3. Quare $d z$ est. 5. et protracta est $z d$ in l, et est $z l$ equalis l; scilicet. 13. et est sicut $z d$ ad $z l$, ita $d e$ ad $l m$. Quare multiplicabis $z l$ in $d e$, et diuides per $z d$, exibit $l m$. $\frac{2}{5}$ 10. Similiter diuisa multiplicatione ex $z l$ in $z e$ per $z d$, scilicet 39 per 5, exibit $m z$ $\frac{4}{5}$ 7; et sic inuencti sunt alij duo numeri facientes compositum ex quadratis ipsorum 169. qui sunt $\frac{2}{5}$ 10 et $\frac{4}{5}$ 7, et sic ostenditur hoc posse fieri in infinitis modis.

Si quatuor numeri non proportionales proponuntur, et sit primus minor secundo, et tertius minor quarto, et agregatus ex quadratis primj et secundi multiplicetur per aggregatum quadratorum tertij et quarti, et neuter ex aggregatis quadratus fuerit, egredietur numerus qui duobus modis equabitur duobus quadratis numeris; et si unus tantum ex agregatis fuerit quadratus, tunc equabitur egressus numerus duobus quadratis tripliciter; et si ambo compositi quadrati fuerint, tunc egressus equabitur duobus quadratis quadrupliciter, et hec intelligantur sine fractione. Sint IIIJ[or] numeri non proportionales a, b, g, d (1), et sit autem a minor b, et g minor d, et si compositus

(1) Vedi Fig. 16.

quadratorum ex numeris *a b* numerus est *e*, compositus quidem ex quadratis | numerorum *g d* esto *z*, et multiplicetur *e* per *z*, egrediatur numerus *c f* (1), et non sit quadratus aliquis numerorum *e z*, dico quod numerus *c f* equatur duobus quadratis, duobus numeris, etiam duobus modis; multiplicatur primum *a* per *g*, et egrediatur numerus *t k*, et ex *b* in *d* egrediatur *k l*, et ex *a* in *d* egrediatur *m n*, et ex *b* in *g* egrediatur *n o*. Et quoniam numeri *a*, *b*, *g*, *d* proportionales non sunt, et est minor *a* quam *b*, et *g* quam *d*, multiplicationes supradictas inequales esse necesse est, et est minor *t k* quam *k l*, ex *k l* summatur *k p* equalis *t k*. Similiter numerorum *m n*, *n o* sit maior *n o* quam *m n*, et adiaceat *n q* equalis *m n*, dico quod numerus *c f* equatur coniunctioni quadratorum qui fiunt á numeris *t l* et *q o*, et á numeris *m o* et *p l*, quoniam ex ductu *e* in *z* prouenit *c f*, et est *e* summa duorum quadratorum qui fiunt á numeris *a b*. Ergo *c f* prouenit ex multiplicatione quadrati qui fit á numero *a* in *z*, et á numero *b* in *z*. Sit ergo *c i* id quod egreditur ex multiplicatione eius qui fit ab *a* in se, scilicet quadrati ipsius *a* in *z*, remanebit ergo *i f* pro numero qui fit ex ductu quadrati numeri *b* in *z*. Sed *z* est coniunctio quadratorum qui fiunt á numeris *g d*. Quare multiplicatio quadrati, qui fit á numero *a* in *z*, equatur multiplicationibus duabus, videlicet quadrati qui fit ab *a* in quadratum qui fit á numero *g*, et in quadratum qui fit á numero *d*. Sit ergo *c h* id quod egreditur fol. 22 recto

(1) Vedi Fig. 17.

ex multiplicatione quadrati, qui fit ab a, in quadratum qui fit á numero g, erit ergo $h\,i$ id quod egreditur ex multiplicatione quadrati qui fit á numero a in eum qui fit á numero d. Item $i\,r$ sit multiplicatio eius, qui fit á numero b, in eum, qui fit á numero g, remanebit ergo $r\,f$ illud quod fit ex ductu quadrati, qui fit á numero b, in eum qui fit á numero d; diuisus est ergo totus numerus $c\,f$ in IIII^or numeris, qui sunt $c\,h$, $h\,i$, $i\,r$, $r\,f$, et est quadratus unusquisque eorum, cum factus sit ex multiplicatione quadrati numeri in quadratum numerum, quorum radices esse ostendam $t\,k$, $k\,l$, $m\,n$, $n\,o$; primum quidem ostendam quadratum, qui fit á numero $t\,k$, equalem esse numero $c\,h$, est enim $c\,h$ factus ex multiplicatione quadrati, qui fit a numero a, in quadratum qui fit á numero g. Sed $t\,k$ factus est ex multiplicatione a in g, quare quadratus, qui fit á numero $t\,k$, equatur quadrato qui fit ab eo ex g. Similiter ostendetur quadratum qui fit ex a, in eum qui fit ex d, equari quadrato qui fit á numero $m\,n$, idest equari numero $h\,i$, et quadratum qui fit á numero $k\,l$ numero $i\,r$, $r\,f$, et adhuc quadratus, qui fit á numero $n\,o$, equatur numero $i\,r$, $r\,f$: demonstrandum quidem restat duos quadratos, qui fiunt á numeris $t\,l$ et $q\,o$, vel fiunt á numeris $m\,o$ et $p\,l$, equales esse IIII^or quadratis, qui fiunt á numeris $t\,k$, $k\,l$,
fol. 22 verso $m\,n$, $n\,o$; quibus ostendam primum equales esse illj, | qui fiunt á numeris $t\,l$ et $q\,o$; quadratus quidem, qui fit á numero $t\,l$, equatur duobus ex predictis quatuor quadratis, eis qui fiunt á numeris $t\,k$, $k\,l$ et duplo multiplicationis $t\,k$ in $l\,k$. Quare restat demonstrandum quod duplum multiplicationis $t\,k$ in $k\,l$, cum quadrato qui fit á

numero *q* o, faciant equalem duobus reliquis quadratis, eis videlicet qui fiunt á numeris *m n*, *n o*. Ostendam primum quod *t k* in *k l* equatur *m n* in *n o*. Est enim *t k* id quod fit ex *a* in *g*, et *k l* est factus ex *b* in *d*. Ergo multiplicatio *t k* in *k l* egreditur ex multiplicatione *a* in *g*, ducta in multiplicationem ex *b* in *d*. Similiter multiplicatio *m n* in *n o*, surgit ex multiplicatione *a* in *d*, ducta in multiplicationem *b* in *g*. Quare *m n* in *n o* est sicut *t k* in *k l*. Ergo opportet demonstrare duplum *m n* in *n o*, cum quadrato qui fit á numero *q o* equalem esse quadratis, qui fiunt á numeris *m n* et *n o*; est enim *n q* equalis *n m*; quare quadratus, qui fit á numero *m n*, equatur multiplicationi *m n* in *n q*, est enim plus *m n* in *n o*, quam *m n* in *n q*, secundum illud quod est ex *m n* in *q o*. Ergo superficies *m n* in *n o* superhabundat quadratum, qui fit á numero *m n* in superficie *q o* in *m n*, hoc est *q o* in *q n*. Et quoniam numero *m n* equalis est numerus *q n*, comunis adiaceat *q o*. Erit ergo totus *n o* equalis numeris *m n* et *q o*. Quare quadratus, qui fit á numero *n o*, equatur duabûs multiplicationibus, que fiunt á numero *o n* in *n m*, et ab *o n* in *o q*. Ergo quadratus qui fit á numero *n o* superhabundat superficiem *o n* in *n m*, in superficie *q o* in *o n*. Sed superficies *m n* in *n ó* superhabundat quadratum, qui fit á numero *m n*, in superficie *n q* in *q o*. Sed quadratus qui fit á numero *n o* superhabundat eandem superficiem *m n* in *n o*, in hoc quod fit ex *n o* in *o q*. Sed superficies *n o*, *q o* superhabundat superficiem *o q*, *q n* in id quod fit á numero *q o* in se. Ergo quadrati qui fiunt á numeris *m n* et *n o* su-

perhabundant duplum superficiei *m n* in *n o*, hoc est *t k* in *k t* in quadrato numeri *q o*. Sed duplum multiplicationis *t k* in *k l* cum quadrato, qui fit á numero *q o*, equatur duobus quadratis, qui fiunt á numeris *m n* *n o*. Quare quadrati, qui fiunt á numeris *t l* et *q o*, equantur quatuor quadratis, qui fiunt á numeris *t k*, *k l*, *m n*, *n o*, hoc est numero *c f*, quod opportebat ostendere.

Ex hoc quidem manifestum est, quod quando duo numeri inequales proponuntur, duplum multiplicationis unius in alium, cum quadrato numerj in quo maior numerus superhabundat minorem, equatur quadratis qui fiunt ab
fol. 23 recto ipsis numeris. Quare multiplicatio | *t k* in *k l*, hoc est *m n* in *n o*, cum quadrato qui fit a numero *p l*, equatur quadratis qui fiunt á numeris *t k*, *k l*. Quare si comuniter addantur duo quadrati, qui fiunt á numeris *m n*, *n o*, erunt duplum superficiei, que est ex *m n*, in *n o*, cum tribus quadratis, qui fiunt á numeris *p l*, *m n*, *n o*, equales IIII.or quadratis, qui fiunt á numeris *t k*, *k l*, *m n*, *n o*, hoc est numero *c f*. Sed duplo superficiei, que est ex *m n* in *n o*, et duobus quadratis, qui sunt ex *m n*, *n o*, equalis est quadratus, qui fit á numero *m o*. Ergo duo quadrati, qui fiunt á numeris *m o* et *p l*, equantur numero *c f*, ut opportebat ostendere.

Sed sit unus ex numeris *e z* quadratus, et primo numerus *e*, dico esse possibile inuenire alios duos quadratos numeros, qui equantur numero *c f*, quorum unus est ipse, qui egreditur ex multiplicatione numeri *e* in quadratum, qui fit á numero *g*, et alius egreditur ex ductu *e* in eum, qui fit á numero *d*, quoniam quadratus est numerus *e*, si

multiplicatur per quadratum numerum, factus ex multiplicatione quadratus erit. Quare quadrati sunt qui fiunt ex ductu *e* in quadratos qui fiunt a numeris *g d*. Sed coniunctus ex quadratis numerorum *g d* est *z*, et ex *e* in *z* prouenit *c f*, quod opportebat ostendere.

Similiter si numeri *e z* quadrati fuerint, erunt alij duo (*sic*) numeri quadrati, qui coniuncti facerent numerum *c f*, et sunt illi, qui egrederentur ex ductu *z* in quadratis qui fiunt a numeris *a b*, et ex ductu *e* in quadratis qui fiunt á numeris *g d;* et, sicut dixi, si unus ex numeris *e z* quadratus fuerit, equatur numerus *c f* ter duobus diuersis quadratis; et si ambo quadrati fuerint, equabitur numerus *c f* quater duobus diuersis quadratis.

Inuenire alio modo quadratum numerum, qui duobus quadratis numeris equatur; adiaceant IIII^or^ numeri proportionales *a*, *b*, *g*, *d* (1), ut *a* quidem ad *b*, ita *g* ad *d*, et compositus ex quadratis numerorum *a b* esto *e*, numerorum quoque *g d* esto *z*, et multiplicetur *e* in *z* et proueniet *c f* (2), dico quoniam *c f* est quadratus, et equalis coniunctio ex duobus quadratis, quod sic probatur; ex *a* quidem in *g* proueniat *t k*, et ex *b* in *d* proueniat *k l*, et ex *a* in *d* proueniat *m n*, et ex *b* in *g* proueniat *n o;* dico primum quod numerus *m n* numero *n o* est equalis: sunt enim proportionales numeri *a*, *b*, *g*, *d* in ea, quam habet *a* ad *b*, proportione. Quare multiplicatio ex *a* in *d* equatur multiplicationi ex *b* in *g*, hoc est numerus *m n* numero *n o*, reliquos uero duos numeros inequales esse demonstrabo, scilicet *k t* et *k l*; quare est sicut *a* ad *b*,

(1) Vedi Fig. 16.

(2) Vedi Fig. 18.

ita g ad d; per equale ergo erit ut a ad g ita b ad d. Quare si b est maior quam a, erit d maior g, et si minor est b quam a, minor itaque esset d quam g. Quare fol 23 verso numeri a g, aut | ambo sunt minores, aut ambo maiores numeris b d, equales quidem esse non possunt, quia si equales essent, iam numeri a, g, b, d non essent IIII^{or}.

Sint ergó a g minores, quare factus ex eis, scilicet t k, minor est facto ex d b, hoc est quam k l: et quoniam est ut a ad g; ita quadratus, qui fit ab a, ad numerum, qui fit ex a in g, hoc est ad numerum t k. Rursus quoniam est sicut a ad g, ita b ad d. Sed sicut b ad d, ita quadratus, qui fit á numero b ad numerum, qui fit ex b in d, hoc est ad numerum k l. Per équale ergo est ut a ad g, ita quadratus, qui fit á numero b, est ad numerum k l. Sed sicut a ad g, ita fuit quadratus, qui fit ab a ad numerum t k; quare et compositi et proportionales erunt. hoc est ut a ad g, ita compositus quadratorum, qui fiunt á numeris a b, est ad compositum duorum numerorum t k et k l, hoc est numerus e ad numerum t l. Similiter ostendetur quod sicut a ad g, ita t l ad z. Quare est sicut e ad t l, ita t l ad numerum z. Ergo numerus t l medius proportionalis est numerorum e z. Quare quadratus, qui fit á numero t l, equatur superficiei rectianguli, que fit ex numeris e z. Sed superficies numerorum, que fit á numeris e z, est numerus c f.

Quare c f est quadratus, cuius radix est t l. Aliter, quoniam ostensum est numerum c f in superiori demonstratione equari IIII^{or} quadratis, qui fiunt á numeris t k, k l, m n, n o, demonstrabo quidem quadratum, qui fit á numero t l, equarj eisdem IIII^{or} quadratis hoc modo. Quadratus quidem, qui fit á numero t l, equatur duobus quadratis, qui fiunt á

numeris $t\,k$ et $k\,l$, et duplo superficiei ex $t\,k$ in $k\,l$. Sed superius demonstrauimus superficiem, que fit ex $t\,k$ in $k\,l$, equalem esse superficiei, que fit ex $m\,n$, in $n\,o$. Sed superficies, que fit ex $m\,n$ in $n\,o$, est ex equalibus numeris. Quare $m\,n$ in $n\,o$ est sicut $m\,n$ in se, uel sicut $n\,o$ in se. Quare duplum ex ductu $t\,k$ in $k\,l$ equatur duobus quadratis, qui fiunt á numeris $m\,n$, $n\,o$; quare demonstratum est quadratum, qui fit á numero $t\,l$, equalem esse eis, qui fiunt á numeris $t\,k$, $k\,l$, $m\,n$, $n\,o$, hoc est numero $c\,f$, ut opportebat ostendere.

Et quoniam minor est numerus $t\,k$ numero $k\,l$, accipiatur ex $l\,k$ numerus $k\,p$ equalis numero $t\,k$, et, ut superius diximus, inuenientur quadrati, qui fiunt á numeris $m\,o$ et $p\,l$, equarj numero $c\,f$.

Possunt etiam duo quadrati inuenirj, quorum aggregatio erit quadratus numerus per quoslibet duos numeros datos. Verbi gratia, dentur duo numeri a et b, prout libuerit, sit tamen b maior, et auferatur á quadrato numeri b quadratus | numeri a, et residuum erit radix unius quadratorum inueniendorum; deinde accipiatur duplum eius, quod prouenit ex ductu a in b, quod erit etiam radix alterius quadrati, quod probatur per precedentem proximam demonstrationem (*sic*). Ponam quod sit proportio g ad d, sicut a ad b, et sit g equalis a, et d equalis b, et erit id quod fit ex a in se equale ei, quod fit ex a in g, et fuit id $t\,k$, et illud quod fit á b, equale ei quod fit à b in d, scilicet $k\,l$. Vnde si auferatur $t\,k$ ex $k\,l$, hoc est $k\,p$, remanebit $p\,l$, que est una ex radicibus. *fol. 24 recto*

Item duplum superficiei a in b equabitur eis, qui fiunt ex a in d et ex g in b, scilicet numero $m\,o$, qui est alia radix.

Invenire duos numeros, quorum quadrati insimul iuncti faciant numerum non quadratum, factum ex compositione duorum quadratorum factorum ex numeris datis.

Sint duo dati numeri *g*, *d* (1), quorum quadrati simul coniuncti fiant numerum *z* non quadratum: uolo duos alios numeros inuenire, quorum quadrati insimul iuncti faciant numerum *z*. Adiaceant duo numeri *a* et *b*, quorum quadrati coniuncti faciant numerum *e* quadratum, non sit sicut *g* ad *d* ita *a* ad *b*, et multiplicetur *e* per *z*, egrediatur numerus *i*, et inueniantur duo numeri, quorum quadrati insimul coniuncti faciant numerum *I*. Sintque *p*, *q*, in quorum mensura ponantur recte *k l*, *l m* (2), facientes angulum rectum, ipsum scilicet qui sub *k l m* copuletur *k m*. Erit ergo *k m* radix numeri *I*, et accipiatu ex *k m* recta *m n* equalis radici numeri *z*, et protrahatur secundum rectum angulum linea *n o* et *o m*, sunt recte rationales facientes compositum ex quadratis ipsorum equalem numero *z*. Quoniam quidem quadratus recte *k m* est equalis numero *I*, et numerus *I* est factus ex *e* in *g*, ergo si multiplicauerimus radicem numeri *e* per radicem numeri *g*, habebitur radix numeri *I*, hoc est *m k*. Et quia radix numeri *e* est rationalis, quotiens unitas est in ipsa radice, totiens radix numeri *g*, hoc est *m n*, est in recta *m k*. Sit ergo *f* radix numeri *e*. Quare est sicut unitas ad numerum *f*, ita *m n* ad *m k*, et sicut *m n* est ad *m k*, ita *n o* est ad *k l*, et *o m* ad *m l*; per equale ergo ut unitas ad numerum *f*, ita *n o* ad *k l*, et *m o* ad *m l*. Quare si diuiserimus *k l* per numerum *f*, egredietur

(1) Vedi Fig. 19.
(2) Vedi Fig. 20.

numerus $n\,o$ rationalis. Similiter si diuiserimus $m\,l$ per f, ueniet $o\,m$. Inuenti sunt ergo duo numeri $n\,o$ et $o\,m$, quorum quadrati coniuncti faciunt non quadratum numerum $m\,n$, hoc est numerum z, qui z est compositus ex quadratis numerorum g, d, quod oportebat ostendere.

Et ut hec in numeris demonstrentur, sit numerus g, 4, et numerus d. 5; quare compositus ex quadratis | ipsorum, scilicet z, est 41, et ex adiacentibus numeri a sit 3, et d sit 4, quorum quadrati coniuncti faciunt 15, scilicet numerum e; multiplicatio quidem ex e in g, scilicet de 25 in 41, surgit in 1025, et est possibile invenire duos alios numeros dupliciter, quorum quadrati coniuncti faciunt 1025, quorum unus est 32, alter 1, vel unus est 31; et alius 8: sit ergo $k\,l$ 32, aut 31, et $l\,m$ sit 1, uel 8, et accipiatur radix de 25, scilicet numerus f, et diuidantur per ipsum numeri $k\,l$ et $l\,m$, et habebimus $n\,o$ et $o\,m$. videlicet si $k\,l$ est 32, et $l\,m$ est 1, erit $n\,o$ $\frac{2}{5}$ 6, et $o\,m$ erit tantum $\frac{1}{5}$ unius. Invencti sunt ergo duo numeri, scilicet $\frac{1}{5}$ 6 et $\frac{1}{5}$ quorum quadrati equantur 41, scilicet numero z; et si $k\,l$ fuerit 31, et $l\,m$ fuerit 8, erit $n\,o$, $\frac{1}{5}$ 6, et $o\,m$ erit $\frac{3}{5}$ 1, et sic invencti sunt duo alij numeri, quorum quadrati insimul coniuncti faciant similiter 41, quod oportebat facere. fol. 24 recto.

Si ab unitate numeri quot cumque continui, pares videlicet et impares, ordinate disponantur, numerus solidus, qui fit ab ultimo et á sequente et ab eorum aggregato, equatus sexcuplo summae collectionis omnium quadratorum, qui fiunt ab omnibus numeris; videlicet qui fiunt ab unitate et á dispositis numeris: disponantur quidem ab unitate $a\,b$ (1), numeri continui pares et impares quotcum-

(1) Vedi Fig. 21.

que ordinate bg, gd, de, ez, et sit zi numerus sequens numerum ez in ordine numerorum, hoc est quod sit uno plus eo, dico numerum solidum qui fit á numeris ez, zi, et ei, hoc est id, quod fit ex ductu ez in zi, et productum in coniunctum ipsorum, scilicet ie, equari sexcuplo omnium quadratorum, qui fiunt ab unitate ab, et á numeris dispositis bg, gd, de, ez. Accipiatur quidem ex numero zi numerus zt equalis numero ez remanebit ti unum. Item ex zt auferatur kz equalis numero de, remanebit similiter kt unum, in quo superhabundat numerus ez numerum de, equalis enim zt numero ez. Erit ergo numerus ki duplum unius, scilicet 2. Solidus ergo numerus, qui fit á numeris ez, zk, et ek, equatur solido qui fit á numeris ze, ed, dz; sed solidus qui fit á numeris ez, zk, ek, cum solido qui fit á numeris ez, zk, ki, et cum solido qui fit á numeris ez, ki, ei, equatur solido qui fit á numeris ez, zi, ei; demonstrabimus quidem solidos ez, zk, ki, et ez, ki, ei equales esse sexcuplo quadrati qui fit á numeros ez. Ponam itaque numerum ez radicem. Erit ergo zk radix, uno diminuto. Quare totus ei duabus radicibus et unitati equatur; multiplicatio quidem ez in zk facit quadratum,
fol. 25 recto. excepta radice. Mul | tiplicatio quidem unius quadrati, excepta radice, in numerum ki, scilicet in duo; facit duos quadratos, duabus radicibus exceptis. Ergo solidus qui fit á numeris ez, zk, ki equatur duobus quadratis qui fiunt á numero ez, duabus radicibus exceptis. Rursus ex ez in ki duo radices proueniunt, quibus multiplicatis in duas radices et in unum, scilicet in numerum ie, faciunt IIII.^{or} quadratos et duas radices. Ergo solidum quod fit á numeris ez, ki, ei equatur IIII.^{or} quadratis et duabus radicibus, quorum unusquisque quadratus fit á numera ez.

Additis ergo supradictis duobus quadratis, duabus radicibus exceptis, cum IIII.or quadratis et duabus radicibus additis, faciunt sex quadratos, quorum unusquisque fit a numero $e\ z$. Ergo solidum quod fit á numeris $e\ z$, $z\ i$, $e\ i$ equatur solido qui fit á numero $e\ z$, $z\ k$, $e\ k$ et sexcuplo quadrati qui fit á numero $e\ z$.

Sed solido quod fit á numeris $e\ z$, $z\ k$, $e\ k$ equatur solidum $d\ e$, $e\ z$, $d\ z$. Ergo solidum quod fit á numeris $e\ z$, $z\ i$, $e\ i$ equatur solido quod fit á numeris $d\ e$, $e\ z$, $d\ z$, et sescuplo quadrati á numero $e\ z$. Similiter ostenditur solidum quod fit á numeris $d\ e$, $e\ z$, $d\ z$ equale esse solido qui fit a numeris $g\ d$, $d\ e$, $g\ e$, sexcuplo quadrati qui fit á numero $d\ e$. Ergo solidum quod fit á numeris $e\ z$, $z\ i$, $e\ i$ equatur solido quod fit á numeris $g\ d$, $d\ e$, $g\ e$, et sexcuplo quadratorum qui fiunt á numeris $d\ e$, $e\ z$: ostenditur solidum rursus quod fit á numeris $g\ d$, $d\ e$, $g\ e$ equale esse solido quod fit á numeris $b\ g$, $g\ d$, $b\ d$, et sexcuplo quadrati qui fit á numero $g\ d$. Ergo solidum quod fit á numeris $e\ z$, $z\ i$, $e\ i$ equatur solido quod fit á numeris $b\ g$, $g\ d$, $d\ b$ et sexcuplo quadratorum qui fiunt á numeris $g\ d$, $d\ e$, $e\ z$.

Similiter, supradictis dispositis, ostendetur solidum quod fit á numeris $b\ g$, $g\ d$, $b\ d$, equale esse solido quod fit ab unitate $a\ b$, et á numeris $b\ g$, $a\ g$, et sexcuplo quadrati qui fit á numero $b\ g$. Ergo solidum, quod fit á numeris $e\ z$, $z\ i$, $e\ i$, equatur solido quod fit ab unitate $a\ b$ et numeris $b\ g$, $a\ g$, et sexcuplo quadratorum qui fiunt á numeris $b\ g$ $g\ d$, $d\ e$, $e\ f$. Sed solidum quod fit ab unitate $a\ b$ et á numeris $b\ g$, $a\ g$ equatur sexcuplo quadrati qui fit ab unitate $a\ b$. Est enim $b\ g$ 2, et $a\ g$ 3.

Ergo solidum, quod fit á numeris *e z*, *z i*, *e i*, equatur sexcuplo quadratorum, qui fiunt ab unitate *a b* et á numeris *b g*, *g d*, *d e*, *e z*, quod oportebat ostendere. Est enim alius modus per quem possumus ad idem deuenire, qui in sequentibus ostendetur.

fol. 25 verso. Si ab unitate numeri impares ordinate quotcumque disponantur, solidum, quod fit á maximo eorum et á sequente impari et ab eorum composito, equatur duplo | sexcupli omnium quadratorum, qui fiunt ab unitate et á dispositis numeris. Sint quidem ab unitate *a b* (1) numeri quotcumque dispositi impares ordinate *b g*, *g d*, *d e*, et sequens impar esto *e z*, dico quidem solidum quod fit á numeris *p e*, *e z*, et ab eorum composito *d z* equari duplo sexcuplj, hoc est duodecuplo summe quadratorum, qui fiunt ab unitate *a b*, et á dispositis numeris *b g*, *g d*, *d e*. Summatur (*sic*) quidem ex numero *e z* numerus *e i* equalis numero *d e*. erit ergo numerus *i z* duo. Ostendam prius solidum, quod fit á numeris *g d*, *d e*, et eorum composito *g e*, cum duodecuplo quadrati qui fit á numero *d e*, equale esse solido quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z*. Sit itaque numerus *d e* radix, erit ergo numerus *g d* radix minus duobus, et totus *g e* erit due radices minus duobus. Quare ex ductu *g d* in *d e* prouenit quadratus, duabus radicibus exceptis, quod totum si ducatur in numerum *g e*, hoc est in duas radices, duabus unitatibus diminutis, provenient duo cubi numeri, et IIII^or radices minus sex quadratis, quibus si addatur duodecuplum quadrati, qui fit á radice *d e*, erunt duo cubi et sex quadrati et IIII^or radices. Rursus, quoniam *d e* est radix, erit numerus *e i* similiter radix. Quare

(1) Vedi Fig. 22.

totus *e z* erit radix et duabus unitatibus additis, que sunt *i z*, et composito ex eis *d z*, erunt due radices, et due unitates. Ex ductu quidem *d e* in *e z* prouenit quadratus et due radices. Ex ductu quidem horum in numerum *d z*, hoc est in duas radices et in duo, proueniunt similiter duo cubi et sex quadrati et IIII^or radices. Quare ostensum est solidum quod fit á numeris *g d*, *d e*, *g e*, et duodecuplum quadrati, quod fit á numero *d e*, equale esse solido, quod fit à numeris *d e*, *e z*, *d z*. Eodemque modo ostendetur solidum, quod fit á numeris *b g*, *g d*, *b d*, cum duodecuplo quadrati, qui fit á numero *g d*, equari solido, quod fit á numeris *g d*, *d e*, *g e*. Ergo solidum, quod fit á numeris *d e*, *e z*, *d z*, equatur solido, quod fit á numeris *b g*, *g d*, *b d*, et duodecuplo quadratorum, qui fuerint á numeris *g d*, *d e*. Rursus etiam, supradictis dispositis, ostendetur solidum, quod fit á numeris *b g*, *g d*, *b d*, equale esse solido, quod fit ab unitate *a b*, et numeris *b g*, *a g*, et duodecuplo quadrati, qui fit a numero *b g*. Sed solidum, quod fit ab unitate *a b*, et á numeris *b g* et *a g*, est duodecuplum quadrati, qui fit ab unitate *a b*, ternarius est numerus *b g*, quaternarius quoque numerus *a g*. Ergo solidum, quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z*, equatur duodecuplum omnium quadratorum, qui fiunt á subiacentibus, scilicet ab unitate *a b*, et á numeris *b g*, *g d*, *d e*, quod oportebat ostendere.

Simili quoque modo, si á binario disponantur pares numeri quotcumque per ordinem, inuenietur solidum, quod erit ab ultimo eorum, et á sequente, et ab eorum composito, equari duodecuplo omnium quadratorum, qui fiunt á dispositis paribus numeris. fol. 26 recto

Eademque uia et modo inuenietur rursus si á ternario dispositi fuerint numeri quotcumque ascendentes per ternarium ordinate, solidum quod fit ab ultimo eorum, et á sequente, et á coniuncto, equari sexcupli triplo omnium quadratorum, qui fiunt ab ipsis numeris ascendentibus per ternarium; et quando ascendent per binarium, ut fit in paribus, tunc ultimum solidum equatur duplo sexcupli omnium quadratorum adiacentium numerorum, et quando ascendunt per unitatem, ut fit in numeris continuis, tunc suprascriptum solidum equatur simplo sexcupli quadratorum adiacentium numerorum, ut in suprascriptis demonstrauimus, que intelligas in quadratis, qui fiunt á numeris qui ascendunt ordinate per quaternarium a IIII^or, uel á V^que per quinarium, uel per ascensionem reliquorum numerorum.

Si duo numeri primi componantur ad se inuicem, feceritque compositus ex eis numerum parem, si solidus numerus, qui fit ab ipsis et ab eorum composito, multiplicetur per numerum in quo maior numerus excedit minorem, egredietur numerus, cuius vigexima quarta pars erit integra. Sint duo numeri a b et b g (1) primi ad se inuicem, facientes compositum ex eis a g numerum parem, hoc est quod sint minimj in ipsa proportione, quam habet numerus a b ad numerum b g, et numerus b g maior, et summatur (*sic*) ex numero b g numerus b d equalis numero a b. Erit ergo numerus d g id in quo numerus b g superhabundat numerum a b. Dico quidem quod si numerus a b multiplicetur in numerum b g, et quod proueniet ducatur in

(1) Vedi Fig. 23.

a g, et hoc totum producatur in numerum *d g*, egredietur numerus, cuius uigexima quarta pars, hoc est tertia octaue, uel quarta sexte partis, erit integra. Numeri quidem *a b* et *b g* ambo impares sunt, quia si non essent impares, compositus ex eis non esset par; nec ambo sunt pares, qui si pares essent ambo, iam non essent primj ad se inuicem. Ergo impares sunt numeri *a b* et *b g*. Et quoniam numerus *b d* equalis est numero *a b*, duplus est ergo numerus *a d* numero *a b*. Ergo par est numerus *a d*. Ergo reliquus *d g* est par, quia si par numerus auferatur á parj, par remanet; et quia numerus *d g* est par, erit ergo medietas eius aut par, aut impar. Esto prius impar, medietas quidem numeri *a d*, scilicet *a b*, est impar. Quare addita medietate numeri *a d* cum medietate numeri *d g*, scilicet additis duobus imparibus, parem facient numerum; ergo medietas numeri *a g* est par. Quare totus *a g* est pariter par. Vnde quarta eius pars est integra. Quare ex ductu | *a g* in *g d* surgit numerus, cuius fol. 28 verso
octaua pars est integra. Sed si medietas numeri *g d* par erit, ergo quarta eius integra; quare ex ductu *d g* in *a g* ueniet numerus, cuius octaua pars est similiter integra. Quare si quod fit ex ductu *a g* ducatur in *b g*, et hoc totum producatur in *a b*, proueniet numerus, cuius octaua pars erit integra. Et quoniam numeri *a b*, *b g* sunt impares, aut tertia pars unius est integra, aut non. Esto prius integra. Quare ex ductu solidi, quod fit á numeris *a b*, *b g*, *a g*, in numerum *d g*, egrediatur numerus *k* (1), cuius tertia pars est integra, et cuius etiam octaua pars inuencta est integra. Ergo uigexima quarta pars eius

(1) Vedi Fig. 24.

erit integra, ut prediximus. Et si tertia pars numeri $a\ b$, uel $b\ g$ non est integra, si unusquisque eorum diuidatur per. 3. remanebit aut equaliter, aut inequaliter; ex utroque remaneat primum equaliter; quare numerus $g\ d$ diuiditur integraliter per. 3. Quare ex ductu solidi supradicti in numerum $d\ g$ egreditur numerus, cuius tertia pars est integra.

Sed non remaneat equaliter ex numeris $a\ b$, $b\ g$ cum diuiduntur per. 3. remanebit ex aliquo ipsorum. 1., et ex alio. 2. Quare ex coniunctione ipsorum, scilicet ex numero $a\ g$, tertia pars erit integra. Vnde solidi, qui fuit á numeris $a\ b$, $b\ g$, $a\ g$, tertia pars eius erit integra. Quare ex ductu ipsius solidi in numerum $d\ g$ egreditur numerus, cuius tertia pars est integra; et quoniam eius octaua pars inuencta est similiter integra, erit ergo uigexima quarta pars eius integra, ut oportebat ostendere. Et hoc idem erit si numeri $a\ b$ et $b\ g$ non fuerint primj ad se ad inuicem.

Et si unus ex numeris $a\ b$, $b\ g$ fuerit par, coniunctus ex eis erit impar, tunc ostendetur similiter si solidum, quod fit á duplo unius cuiusque, et ab eorum coniuncto $a\ g$, ducatur in numerum $d\ g$, surgere in numerum, cuius etiam uigexima quarta pars erit integra, siue numeri sint primj inter se, siue non; et factus numerus, videlicet cuius uigexima quarta pars est integra, congruum appellauj.

Si circa aliquem numerum adiaceant numeri quotcumque minores et maiores eo, et sit multitudo minorum equalis multitudinj maiorum, et quot unusquisque ex maioribus superhabundat ipsum numerum, tot ipse numerus superhabundet minores, erit summa adiacentium ex ductu ipsius numeri in numerum multitudinis ipsorum. Circa numerum d adiaceant numeri a, b, g, e, z, I (1), et

(1) Vedi Fig. 25.

sit minor eorum numerus *a*, maximus numerus *I*, equot superhabundit(*sic*) | numerus *I* numerum *d*, tot superhabundat numerus *d* numerum *a*. Similiter, quot superhabundat numerus *z* numerum *d*, tot superhabundet numerus *d* numerum *b*. Rursus quot superhabundat numerus *e* numerum *d*, tot superhabundet numerus *d* numerum *g*. Dico si ducatur *d* in numerum multitudinis numerorum *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i*, proueniet summa ipsorum omnium numerorum, quod sic probatur: minvam quidem ex numero *I* superhabundantiam, quam habet ad numerum *d*, addamque eam numero *a*, erit unusquisque numerorum *a*, *I* equalis numero *d*; quod etiam faciam ex numeris *z b* et *e g*, et erit unusquisque eorum equalis numero *d*. Quare quot sunt numeri *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i*, tot numeri equales numero *d* sunt in summa coniunctionis numerorum *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i*, quod oportebat ostendere. fol. 27 recto

Invenire numerum, quo addito super quadratum numerum, et diminuto ab ipso, faciat semper quadratum numerum; et sic oportet tres quadratos et unum numerum inuenire, quo numero addito super minorem quadratum, facit quadratum secundum. Super quem si addatur idem numerus, facit quadratum tertium, hoc est maiorem, et sic addito ipso numero super secundum quadratum, et diminuto ipso ab eodem, facit semper quadratum. Quoniam quadrati numeri omnes ordinate ascendunt per continuam ascensionem imparium numerorum, erit minor quadratus summa aliqua imparium numerorum ab unitate acceptorum, super quem quadratum proponitur addere numerum, et fieri quadratum secundum, qui quadratus rursus constat et (*sic*) aliqua multitudine imparium ab unitate

ordinate disposita, super quem etiam secundum quadratum
Congruum si addatur numerus idem, qui uocetur congruum, quia congruit his, facit maiorem quadratum, qui etiam maior quadratus egreditur ex aliqua multitudine imparium similiter ab unitate accepta, in qua multitudine tota est multitudo imparium facientium primum quadratum, et alia multitudo facientium congruum idem, et alia multitudo facientium eundem idem congruum. Quare multitudo imparium facientium maiorem quadratum diuidenda est in tres partes predictas. Sed multitudo imparium facientium primum congruum est in aliqua proportione cum multitudine facientium secundum: plures enim numeri impares sunt in multitudines facientium primum congruum, quam multitudine facientium secundum, cum minores numeri sint in ipsa propter ordinem numerorum, quia in ipsa sunt antecedentes impares, et in alia sunt consequentes. Vnde qualiter congruum inueniatur in aliqua data proportione in qua esse poterit, ostendere procurabimus. Adiaceant duo quilibet numeri *a b*, *b g* (1); compositus qui-
fol. 27 verso dem ex ipsis est *a g*, et sit *b g* | maior quam *a b* secundum quantitatem numeri *d g*. Si numerus quidem *b g* ad numerum *a b* minorem proportionem habuerit quam numerus *a g* ad numerum *d g*, tunc possibile erit inuenire congruum ex una multitudine imparium habente proportionem ad multitudinem sequentium imparium, eam videlicet quam habet numerus *g b* ad numerum *a b*; et si maior fuerit proportio numeri *b g* ad numerum *b a*, quam numeri *a g* ad numerum *d g*, tunc impossibile erit inuenire duas multitudines imparium numerorum continuas in pro-

(1) Vedi Fig. 26.

portione quam habet numerus $a\ g$ ad numerum $d\ g$: tunc possibile erunt inuenire duas multitudines imparium numerorum continuas in proportione quam habet numerus $a\ g$ ad numerum $d\ g$, et est (*sic*) summa uniuscuiusque multitudinis egredietur congruum.

Esto prius proportio, quam habet numerus $b\ g$ ad numerum $a\ b$, minor ea quam habet numerus $a\ g$ ad numerum $d\ g$; oportet ergo inuenire duas multitudines imparium immediate in proportione quam habet numerus $b\ g$ ad numerum $a\ b$, et summa unitatum utriusque multitudinis sit eadem: coniunctio quidem ex numeris $a\ b$, et $b\ g$, scilicet $a\ g$, aut est par, aut impar. Esto prius par. Quare numerus $a\ d$, scilicet duplus ad $a\,b$, par est. Vnde residuum $d\ g$ parem esse necesse est. Ex ductu quidem $d\ g$ in $b\ g$ proueniat numerus $e\ z$, et ex ductu $d\ g$ in $a\ b$ proueniat $z\ i$. Est ergo sicut $g\ b$ ad $b\ a$, ita numerus $e\,z$ ad numerum $z\ i$, et sunt numeri $e\ z$, $z\ i$ pares.

Rursus ex ductu $a\ g$ in numeris $g\ b$, et $b\ a$ proueniant pares numeri $k\ m$, $k\ l$. Est ergo sicut $g\ b$ ad $b\ a$, ita $k\,m$ ad $k\ l$. Sed sicut $g\ b$ ad $b\ a$, ita $e\ z$ ad $z\ i$; ergo sicut $e\ z$ ad $z\ i$, ita $k\ m$ ad $k\ l$: denique ducatur $e\ z$ in $k\ l$, proueniat $o\ p$, et ex ductu $z\ i$ in $k\ m$ proueniat $p\ q$. Et quoniam est sicut $e\ z$ ad $z\ i$, ita $k\ m$ ad $k\ l$. Ergo id quod fit ex ductu $e\ z$, in $k\ l$ equale est ei quod fit ex ductu $z\ i$ in $k\ m$; quare equalis est numerus $o\ p$ numero $p\ q$: ostendam utrumque ipsorum esse congruum. Quoniam ex ductu $e\ z$ in $k\ l$ prouenit $o\ p$, quot unitates sunt in numero $e\ z$, tot numeri equales numero $k\ l$ sunt in numero $o\ p$. Sed quot numeri equales numero $k\ l$ sunt in numero $o\ p$, tot continui numeri impares existentes circa numerum $k\ l$ sunt in eodem $o\ p$. Ergo quot unitates sunt in numero $e\ z$, et

tot numeri impares continui existunt circa numerum *k l*; ita quod medietas eorum sint minores numero *k l*, et alia medietas sint maiores, qui omnes faciunt numerum
fol. 28 recto equalem *o p*. Similiter ostendetur quod quot | unitates sunt in numero *z i*, tot numeri impares existentes circa numerum *k m* sunt in numero *p q*. Ergo sicut numerus *e z* est ad *z i*, ita multitudo imparium facientium numerum *o p* est ad multitudinem imparium facientium numerum *p q*, qui ostensus est equalis numero *o p*: dico etiam continuam esse utramque multitudinem. Quia ex ductu *a g* in *b g* prouenit *k m*, et est *b g* equalis numeris *g d* et *d b*: ergo ex ductu *a g* in numeris *d g* et *d b* prouenit *k m*. Sed ex ductu *a g* in *b d*, hoc in *a b*, prouenit *k l*, reliquus ergo *l m* prouenit ex *a g* in *d g*: sed ei numero, qui prouenit ex *a g* in *d g*, equales sunt numeri qui proueniunt ex *g d* in *g b* et in *b a*, hoc est numeri *e z*, *z i*. Quare equalis est numerus *l m* numero *e i*. Accipiatur itaque ex numero *l m* numerus *l n* equalis numero *e z*. Reliquus ergo *n m* reliquo *z i* est equalis. Item ostendendum est numerum *k l* maiorem esse numero *e z*, quoniam proportio *g b* ad *b a* est minor proportione numeri *a g* ad *g d*. Ergo aliquis numerus minor numero *a g* ad numerum *g d* habet eandem proportionem, quam numerus *g b* ad *b a*; sitque numerus *a f*; et quoniam est ut *g b* ad *b a*, ita *a f* ad *d g*: multiplicatio ergo *a f* in *b a* equatur multiplicationi *b g* in *d g*: hoc est numero *e z*. Sed multiplicatio *a g* in *a b*, hoc est numerus *k l*, maior est multiplicatione *a f* in *a b*, hoc est numero *e z*. Accipiatur quidem ex numero *k l* numerus *l h* equalis numero *l n*, hoc est *e z*, erit totus *h n* duplus numero *e z*. Rursus super numerum *k m* addatur numerus *m c* equalis numero *m n*, hoc est *z i*: duplus ergo

est *n c* numero *z i*. Et quoniam par est numerus *k l*, si auferatur ab eo numerus *l h*, hoc est *e z* qui est par, remanebit numerus *k h* par. Similiter si super *k l* addatur *l n*, erit totus *k n* par. Verum et numerus *n c* est par; quare totus *k c* est par. Et quoniam *k h* est par, quot unitates sunt in medietate eius, tot impare (*sic*) numeri intercidunt ab unitate usque ad numerum *k h*, quorum imparium suma (*sic*) facit quadratum numerum, qui prouenit ex multiplicatione medietatis numeri *k h* in se, sit ille quadratus numerus *r o*. Item quot unitates sunt in numero *h n*, tot numeri numerantur ordinate inter numerum *k h* et numerum *k n*, quorum multitudo est par, cum numerus *h n* sit par. Sed dimidium numeri *h n* est *e z*. Ergo quot unitates sunt in numero *e z*, tot impares numeri intercidunt inter numeros *k h* et *k l* (1), ex quorum multitudine ostensum est prouenire numerum *o p*, cum sint circa numerum *k l*, medietas quorum intercidunt inter numeros *k h* et *k l*, et alia medietas | inter *k l* et *k n*; ergo ex omnibus fol. 28 verso imparibus, qui sunt ab unitate usque in numerum *k n*, prouenit *r p*, et est quadratus, cuius radix est medietas numeri *k n*. Rursus quot unitates sunt in numero *n o*, tot numeri intercidunt inter numeros *k n* et *k c*, quorum medietas est ex imparibus numeris: ergo quot unitates sunt in numero *m n*, hoc est in *z i*, tot numeri impares inter-

(1) È chiaro doversi leggere *k n* in vece di *k l* nella linea decimaquinta di questa pagina 87. Tuttavia il Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte superiore* (carta 28 *recto*, lin. 31) ha kh.&kl., come nella medesima linea decimaquinta. Il Codice L. IV, 21 della Biblioteca pubblica Comunale di Siena (carta 493, *recto*, lin. 28), ha kh.7kl., ed il Codice *E.* 5. 5. 18 dell' I. e R. Biblioteca Palatina di Firenze (carta 271, *recto*, lin. 1) ha « hk.7kl. » nei passi corrispondenti a questo passo del Codice Ambrosiano suddetto.

cidunt inter numeros *k n* et *k c;* et sunt continui cum imparibus qui sunt inter *k h* et *k n*, ut prediximus. Sed ex numeris imparibus qui sunt inter *k n* et *k c* colligitur numerus *p q*, cum sit circa numerum *k m*. Ergo ex omnibus imparibus, qui sunt ab unitate usque in numerum *k c*, prouenit numerus *r q;* ergo quadratus est numerus *r q*, et est eius radix medietas numeri *k c*. Ergo congruum est unusquisque numerorum *o p*, et *p q*, ut prediximus Inuentus quidem numerus est, scilicet *p q*, quo addito super quadratum, scilicet super *r p*, facit quadratum numerum, qui est *r q*, et diminuto ipso, scilicet *p q*, hoc est *o p*, ex eodem quadrato, scilicet ex *r p*, remanet quadratus, scilicet *r o*, quod opportebat facere. Que etiam ut clarius uideantur, ponam numerum *a b*. 3. numerum quoque *b g*. 5.; quare totus *a g* erit. 8., residuum quoque *d g* est. 2.: pares enim sunt numeri *a g* et *d g:* ex ductu quidem *d g* in *b g* prouenit. 10., et ex ductu *d g* in *a b* prouenit. 6.; ergo *e z* est. 10. et *z i* est. 6. Est ergo sicut *b g* ad *g a*, ita *e z* ad *z i*, hoc est sicut. 5. ad 3., ita. 10 ad. 6., et 10 est numerus prime multitudinis imparium facientium congruum, et. 6. est numerus secundæ multitudinis facientium idem. Item ex ductu *a g* in *g b* et in *b a*, hoc est ex. 8. in. 5. et in. 3. proueniunt *k m*. 40. et *k l* 24., residuum *l m* est. 16, que equatur numeris *e z*, *z i*. Addantur quidem super *k l* numerus *l n* equalis numero *e z*, scilicet. 10., erit *k n*. 34.; et super *k m* addatur *n m*, scilicet *z i* qui est. 6. erit *k c* 46.; et auferatur ex *k l* numerus *k l* equalis *l n*, scilicet. 10, remanebit *k h*. 14; et ducatur *e z*, hoc est *l n* in *k l*, scilicet. 10. in. 24., prouenit *p o*. 240. qui est congruum, et summa decem numerorum imparium existentium circa. 24., qui sunt inter numeros *k h* et *k n*, hoc est inter. 14. et 34.

Item ex ductu *z i* in *k m*, hoc est de. 6 in. 40., prouenit .240., hoc est *p q* est summa sex imparium existentium circa. 40., qui sunt inter *k n* et *k c*, hoc est inter. 34. et. 46. Ex numeris quidem imparibus, qui sunt ab uno usque in numerum *k h*, scilicet in. 14, prouenit *r o*, et est. 49., quia ab uno usque in 14. sunt septem numeri impares, et sunt circa septenarium; quare ex ductu | 7. in. 7. prouenit fol. 29 recto. summa imparium, qui sunt ab uno usque in. 14. Ergo *r o* est quadratus. Ex multitudine quidem imparium, qui sunt inter *k h* et *k n*, prouenit *o p*. Ergo ex multitudine imparium, qui sunt ab uno usque in *h n*, scilicet in. 34., prouenit numerus *r p*, et sunt illi numeri impares. 17., quorum summa surgit ex ductu. 17. in se; ergo *r p* est quadratus, et est. 289. Nam addito *r o* cum *o p*, scilicet. 49. cum 240. faciunt. 289., quorum radix est. 17. scilicet dimidium *k n*. Item ex multitudine numerorum inb sunt inter *k n* et *k c*, prouenit numerus *p q*, qui est equalis numero *o p*, est enim. 240. Ergo ex multitudine imparium qui sunt ab uno usque in. 46. prouenit numerus *r q*, et est quadratus, cuius radix est dimidium numeri *k c*, scilicet. 23. Nam addito *p q* super *r p*, scilicet 240. cum 289 faciunt. 529. quorum radix est. 23.

Sed si proportio *g b* ad *b a* maior proportione *a g* ad *g d*, et sit iterum numerus *a g* par, dico possibile esse inuenire duas multitudines imparium continuas facientes congruum in proportione quam habet numerus *a g* ad numerum *g d*. Et ut liquidius appareat sit *a b*. 1, et. *b g*. 3. quare *a g* est. 4. et *d g* est. 2. et multiplicetur *a g* in *a b*, proueniat *e z*, et ex *a b* in *d g* proueniat *z i*, est ergo ut *a g* ad *d g*, ita *e z* ad *z i*, et quia *a b* est. 1.

numeri $e\ z$, $z\ i$ sunt equales numeris $a\ g$, $d\ g$, ergo $e\ z$ est. 4., et $z\ i$ est. 2. Item ex ductu $b\ g$ in $a\ g$ proueniat $k\ m$, et ex ductu $b\ g$ in $g\ d$ proueniat $k\ l$, est ergo $k\ m$. 12. et $k\ l$ est. 6. est ergo sicut $e\ z$ ad $z\ i$, hoc est sicut $a\ g$ ad $d\ g$, ita $k\ m$ ad $k\ l$, et ex ductu $e\ z$ in $k\ l$ proueniat $o\ p$, et ex ductu $z\ i$ in $k\ m$ proueniat $p\ q$, equales enim sunt $o\ p$ et $p\ q$. Vnusquisque eorum est. 24. Nam $o\ p$ constat ex IIII.^{or} imparibus, qui sunt circa $k\ l$. 6, hoc circa $k\ l$, propter $e\ z$ qui est. 4., quibus. 4. additis super $k\ l$, faciat $k\ n$, ergo $k\ n$ est. 10. similiter extractis. 4. ex $k\ l$ remaneat $k\ h$, ergo $k\ h$ est. 2. Rursus addito numero $z\ i$, scilicet. 2. super $k\ m$, faciat $k\ c$; ergo $k\ c$ est. 14. et $n\ c$ est. 4., in quibus sunt duo impares, scilicet. 11. et. 13. et sunt circa numerum $k\ m$, scilicet circa. 12 qui faciunt numerum $p\ q$. Ergo primus quadratus, scilicet $r\ o$, est. 1. cuius radix est dimidium numeri $k\ h$, scilicet. 1. Secundus uero quadratus, scilicet $r\ p$, est. 25. cuius radix est dimidium numeri $k\ n$, quod est. 5. Tertius quidem quadratus, scilicet $r\ q$, est. 49. cuius radix est dimidium numeri $k\ c$, quod est. 7. Et notum, quia. 24. est primum | congruum, cum sit minor numerus, cuius 20.ma 4.ta pars sit integra, et oriatur ex duobus minoribus numeris parem numerum facientibus, scilicet ex uno et 3.

fol. 29 verso.

Rursus ex numeris $a\ b$ et $b\ g$ coniunctus fit impar (1), et aufferatur $a\ b$ ex $b\ g$, et sit residuum eorum numerus $g\ d$. Et sit proportio numeri $g\ b$ ad $b\ a$ minor proportione $a\ g$ ad $g\ d$. Inueniam rursus duas multitudines continuas imparium in proportione quamhab et $g\ b$ ad $b\ a$, una quoque multitudine procreabitur congruum unitatum idem: adiaceat itaque numerus t duplus numeri $b\ g$, et numerus s du-

(1) Vedi Fig. 27.

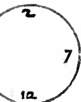
plus numeri *b a*, coniunctus quidem ex numeris *t*, *s* par est, et est *t* ad *s* sicut *b g* ad *b a*, et ducatur *g d* in numeris *t s*, et proueniant numeri *e z* et *z i*. Est ergo sicut *t* ad *s*, hoc est sicut *g b* ad *b a*, ita *e z*, ad *z i*, et ducatur iterum numerus *a g* in numeris *t*, *s*, et proueniant *k m* et *k l*. Est ergo ut *t* ad *s*, hoc est ut *e z*, ad *z i*, ita *k m* ad *k l*; et quoniam pares sunt numeri *t*, *s*, pares sunt numeri *k m* et *k l*, et ostendetur per premissam ea que dicta sunt in numeris *k h*, *h l*, *l n*, *n m* et *m c*, et in reliquis etiam *r o*, *o p*, *p q*, est ergo congruum *o p*, uel *p q* etc. Que etiam ostendemus cum numeris. Sit ita ut *b g*. 2. et *b a* sit. 1. erit *a g*. 3. et *g d*. 1. et *t*. 4, et *s*. 2. et *e z*. 4. et *z i*. 2. et *km*. 12. et *k l*. 6. et *h n*. 8. et *n c*. 4. et *k h* 2, et quadratus *r o* unum congruum *o p*, uel *p q*. 24. Quare quadratus *r p* est 25. et quadratus *r q*. 49. que oportebant ostendere.

Et quoniam numeri *b g* et *b a*, scilicet unum et due (*sic*) sunt minores qui sint in numeris, et ex coniunctione eorum prouenit impar numerus, et cum ipsis habuimus 24. per congruum, sicuti habuimus superius ex positione ternarij et unitatis, qui sunt minores numeri, qui esse possint, facientium parem numerum, ideo manifestum est 24 esse minus et primum congruum quod cadat in tribus quadratis, qui sint ex integris numeris, sed cum fractionibus possunt inuenirj minores eo, ut insequentibus demonstrabimus.

Sed sit proportio *g b* ad *b a* maior proportione *a g* ad *g d*, tunc erunt multitudo imparium primj congrui ad multitudinem secundi, sicut *a g* ad *g d*, et sit iterum *a g* impar. Que ut liquidius demonstrentur, sit *g b*. 5. et *b a* 2 erunt ergo *a g*. 7. et *d. g*. 3. duplum quidem ex *g b* est. 10.

et ex *b a* est 4. et ducatur. 4. in numeris *a g* et *g d*, et ueniet pro multitudine imparium primi congrui. 28. et pro multitudine secundi. 12. et multiplica unumquemque numerorum | *a g* et *d g* per duplum *b g*, et habebis. 70. pro numero, circa quem sunt 12 impares numeri facientes secundum congruum, et 30., circa quem erunt 28 impares facientes primum. Quare extractis 28. de 30. remanent. 2. quorum medictas, scilicet unum est radix primi quadrati; et adde 28 cum. 30. erunt. 58. cuius medietas, scilicet 29 est radix secundi quadrati. Item adde. 12 cum. 70. faciunt .82 quorum medietas scilicet 41. est radix tertij quadrati, et ex ductu. 28. in. 30. uel 12. in. 70. habentur 840 pro congruo. Egreditur autem idem. 840. ex alijs duobus adiacentibus numeris, scilicet ex septenario et quinario, quia si solidum, quod fit ab eis, et ab eorum coniuncto, ducatur in binarium, scilicet id in quo. 7. excedit. 5. proueniet. 840. Egreditur enim multitudo prima imparium facientium ipsum ex ducto binario in septenarium. Quare ipsi impares numeri sunt 14, et sunt circa 60, qui egreditur ex quinario ducto in. 12. multitudo quidem secunda prouenit ex binario ducto in quinarium, et est illa multitudo circa. 84. qui prouenit ex septenario ducto in. 12. Nam decies 84. uel sexagesies 14. equantur solido, qui fit a 5 et 7 et 12. ducto in binarium. Vnde cuiuslibet congrui (1) vigesima quarta pars est integra, ut superius ostensum

fol. 30 recto.



(1) Ciò che si legge nella presente pagina (lin. 12-24) da « in 70 habentur 840 » fino alle parole « cuiuslibet congrui » forma le nove linee 7ª-15ª della carta 30 *recto* del Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*. Presso a queste nove linee sul margine laterale esterno della medesima carta 30 *recto* trovasi la figura riportata in *fac-simile* nel margine laterale esterno della presente pagina 92.

est et est. 24 primus congruum, quod inuenirj potest cum integris quadratis numeris, et ab ipso 24 generantur omnia congrua. Quotiens enim. 24. multiplicabitur per quadratum numerum, totiens congruum procreabitur, et erunt minor quadratus ex tribus quadratis, quibus congruit ipse ille, per quem multiplicabitur. 24. Medius autem quadratus erit numerus, qui procreabitur ex ipso quadrato ducto in. 25. Tertius quidem quadratus erit numerus, qui proueniet ex eodem primo quadrato ducto in. 49. cuius numeri radix erit numerus factus ex multiplicatione radicis primj quadrati in. 7. qui est (1) radix de. 49. et erunt multitudo prima imparium facentium congruum dupla multitudinis facentium idem. Similiter egredietur congruum, si multiplicabitur 24 per aliquam summam quadratorum, qui fiunt ab ordinatis numeris ab unitate ascendentibus per impares et pares, uel per impares tantum, uel impares tantum, aut per eos qui ascendunt per ternarium, seu per quaternarium, uel per reliquos numeros, quorum quadratorum summas superius inuenire docuimus, et erunt proportio imparium facentium secundum congruum ad impares facentium primum, sicut radix ultimi quadrati est ad radicem sequentis quadrati in ordine assumpte collectionis. Verbi gratia summa quadratorum trium imparium numerorum, scilicet unius et nouem et XXV., est 35.,

(1) Ciò che si legge nella presente pagina 93 (lin. 8-11) dalle parole *erit numerus* fino alle parole *qui est*, forma le due linee ventesimaseconda e ventesimaterza della carta 30 *recto* del Codice Ambrosiano *E. 75*, *Parte Superiore*. Fra queste due linee, sulla lettera *a* della parola *multiplicatione*, trovasi un segno di richiamo e sul margine laterale esterno del medesimo *recto* un simil segno di richiamo seguito da una postilla come nel seguente *fac-simile* di tali linee, segni e postilla.

fol. 30 verso. quibus ductis per 24 faciunt 840, | qui est congruum, prouenit etiam ex quinario et septenario adiacentibus, quare proportio prime multitudinis imparium ad multitudinem secundum est sicut. 7. ad 5. ut superius ostensum est.

Si congruum aliquod cum suis quadratis multiplicetur per aliquem quadratum, numerus factus ex multiplicatione congrui in quadratum congruum erit, reliqui quadrati erunt congruentes facto congruo. Sit *a b* (1) quadratus, et *b g* sit congruum, et *g d* sit equalis numero *b g*, quadrati ergo erunt numeri *a g* et *a d*; et adiaceat quidam quadratus numerus *e*. Dico quod id quod fit ex *e* in congruo *b g* congruum erit, et numeri, qui fient ex *e* in quadratis *a b*, *a g*, *a d*, quadrati erunt congruentes congruo facto ex *e* in *b g*. Ex ductu quidem ex *e* in *a b* proueniat *z i*, et ex ductu *e* in *a g*, proueniat *z t*, et ex *e* in *a d* proueniat *z k*. Et quoniam ex *e* quadrato in *a g* quadratum prouenit *z t*, quadratus est ergo etiam *z t*, et est *z t* equalis duobus numeris, qui fiunt ex quadrato *e* in quadratum *a b*, et congruum *b g*. Sed id quod fit ex quadrato *e* in quadratum *a b*, est numerus *z i*. Reliquus ergo *i t* procreatus ex *e* in congruum *b g*. Et quoniam quadrati sunt numeri *e* et *a b*, factus ex eis quadratus est, quadratus est ergo numerus *z i*. Rursus quoniam ex quadrato *e* in quadratum *a d* factus est numerus *z k*, quadratus ergo est *z k*, et est equalis duobus numeris, qui fiunt ex ductu *e* in numeris *a g* et *g d*. Sed ex *e* in *a g* factus est quadratus *z t*. Reliquus ergo *z k* fit ex *e* in *g d*. Et quoniam equalis est numerus *b g* numero *g d*, equalis erunt factus ex *e* in *b g* facto ex *e* in *g d*; factus autem ex *e* in *b g* est *i t*. Ergo *i t* equalis est numero *t k*, si super

(1) Vedi Fig. 28.

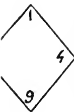
quadratum autem $z\ t$ addatur numerus $t\ k$, faciet quadratum $z\ k$, et si á $z\ t$ quadrato auferatur $t\ k$, hoc est $t\ i$, remanebit $z\ i$ quadratus, ergo congruum est $i\ t$, et congruunt ei tres quadrati, qui sunt $z\ i$, et $z\ t$, et $z\ k$. que oportebat ostendere. Similiter ostendetur prouenire idem, si aliquod congruum cum suis quadratis diuidatur per aliquem quadratum numerum.

Volo inuenire congruum cuius quinta pars sit integra: sit unus ex adiacentibus numeris. 5. alter sit numerus quadratus, facientes coniunctum ex eis numerum quadratum, et extracto minore ex maiore remaneat quadratus numerus. Erit itaque ille quadratus. 4., quo addito cum quinario facit. 9. qui est quadratus, et extracto. 4. de. 5 remanet 1. qui est etiam quadratus; dico ex his numeris adiacentibus egredi congruum, cuius quinta pars erit quadrata: prouenit enim congruum ex his numeris, ex ducta. 1. in duplo quinarij, quod totum multiplicatur per duplum quaternarij, et illud quod egreditur ducitur per nouenarium, | hoc est multiplicare superficiem, que fit ab uno in duplo quinarij, in superficiem que fit á duplo quaternarij, in. 9. hoc est. 10. in. 72; sed ex ductu quaternarij in nouenarium prouenit quadratus numerus, cum ambo sint quadrati. Ergo ex ducto duplo quaternarij in. 9. facit duplum quadrati, et ex ductu dupli quadrati in duplo quinarij prouenit quadruplum quadrati ductum in quinarium. Sed quadruplum quadrati facit quadratum numerum; ergo quadruplum quadratj ductum in. 5. facit quincuplum quadrati, et ductu quincuplo dicti (1) qua- *fol. 31 recto.*

(1) Ciò che si legge nella presente pagina, lin. 25-28 dalla parola « *ductum* » fino alla seconda *a* della parola « *quadrati* » forma le linee settima e ottava della carta 31 *recto* del Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte*

drati ducto in. 1. qui est quadratus, facit iterum quincuplum quadrati. Ergo congruum quod fit ab his quinta pars erit quadrata.

Hec questio predicta in prologo libri huius.



Volo inuenire quadratum, cui addito. 5. uel diminuto, faciat quadratum numerum. Adiaceat congruum, cui quinta pars sit quadrata, eritque 720., cuius quinta pars est. 144. in quo diuide quadratos congruentes eidem. 720. quorum primus est. 961. secundus est. 1681. tertius autem est. 2401. et est radix primi quadrati 31. Secundi. 41. tertii. 49. exibit pro primo quadrato $\frac{97}{144}$ 6, cuius radix est $\frac{7}{12}$. 2., que prouenit ex diuisione 31. in radicem de 144., hoc est in. 12. et pro secundo, hoc est pro quesito quadrato, ueniet $\frac{97}{144}$ 11, cuius radix est $\frac{5}{12}$ 3, que prouenit ex diuisione. 41. in. 12. (1) et pro ultimo quadrato ueniet $\frac{97}{144}$ 16, cuius radix est $\frac{1}{12}$ 4.

Si duo quilibet numeri componantur facientes compositum ex his parem numerum, proportio compositi ad re-

superiore. Fra queste due linee al di sopra delle lettere terza e quarta della parola « *ductu* » vedesi un segno di richiamo, e sul margine laterale esterno del medesimo *recto* un segno simile di richiamo, seguito da una postilla, come nel *fac-simile* seguente di tali linee segni e postilla.

q̃druplu͂ q̃drati facit q̃dratu͂ cu͂ q̃ q̃druplu͂ quadrati
ductu͂ i. 5. facit q̃ncuplu͂ q̃drati & ductu q̃ncuplo de q̃dra ... ut ductu

(1) Ciò che si legge nella presente pagina 96, lin. 8-17, dalla terza lettera della parola *quadratum* fino a « 41 in 12 » forma le sette linee 11-17 della carta 31 *recto* del Codice Ambrosiano *E*. 75, *Parte Superiore*. Presso a queste sette linee sul margine laterale esterno della medesima carta 31 *recto* trovasi la figura riportata in *fac-simile* nel margine laterale esterno della presente pagina 96.

siduum, in quo maior excedit minorem, non erunt eadem quam habet maior numerus ad minorem. Adiaceant duo numeri *a b* et *b g* (1), et sit *g d* id in quo maior *g b* excedit minorem *b a*, et sit par numerus *a g*; dico non esse ut *g b* ad *b a*, ita *a g* ad *g d*. Sed si possibile est, esto *a g* ad *g d*, sicut *g b* ad *b a*: erit ergo *d* superficies que fit ex *b g* in *g d*, equalis superficiei, que fit ex *a g* in *b a*. Sit ergo *z e* numerus superficialis, qui fit ex *b g* in *g d*, et numerus *k l* proueniat ex *a g* in *b a*: equalis est ergo numerus *z e* numero *k l*; ex ductu autem *z e* in *k l* proueniat *o p*. Numerus ergo *o p* equalis est numero qui fit ex ductu *b a* in *g d* in ductum ex *a g* in *b g*. Sit ergo ductus *a b* in *g d* numerus, *z i*, et ductus *a g* in *b g* esto *k m*: maior est enim *k m* quam *k l*, cum maior sit numerus *g b* quam *b a*: ergo *o p* equalis est numero qui fit ex *z i* in *k m*. Esto itaque numerus *p q* factus ex *z i* in *k m*; ergo numerus *o p* equalis est numero *p q*. Sed *o p* quadratus est, cum sit factus á duobus equalibus numeris, qui sunt *e z*, *k l*. | Ergo et *p q* quadratus est. Ostensum fol. 31 verso est superius in primo congruo inueniendo numerum *l m* equalem esse numero *e i*; maior est enim *e i* quam *e z*; ergo maior est *l m* quam *e z*: accipiatur ergo ex numero *l m* numerus *l n* equalis numero *e z*: hoc est numero *k l*. Reliquus *n m* equalis est numero *z i*: addatur itaque super *k m* numerus *m c* equalis numero *m n*; et quoniam *k n* duplus est numero *k l*, par erit *k n*. Ex multitudine quidem imparium qui sunt ab uno usque in *k n* prouenit quadratus *o p*, sunt enim circa numerum *k l*: quare *k l* est radix numeri *o p*. Rursus quoniam ex *z i* in *k m* prouenit

(1) Vedi Fig. 29.

quadratus $p\ q$. Sed quot unitates sunt in numero $z\ i$, tot impares numeri sunt inter numerum $k\ n$ et numerum $k\ c$; duplus est enim $n\ c$ numeri $z\ i$: ergo quadratus $p\ q$ constat ex imparibus qui sunt inter $k\ n$ et $k\ m$ (1). Ergo duo quadrati $o\ p$ et $p\ q$ constant ex omnibus imparibus qui sunt ab unitate usque in numerum $k\ c$; ergo numerus $o\ q$ quadratus est, et est duplus quadrati $o\ p$: proportio ergo quadrati $o\ q$ ad quadratum $o\ p$ est sicut. 2. ad. 1., hoc est sicut numeri non quadrati ad numerum quadratum, quod est inconueniens. Non ergo proportio coniuncti $a\ g$ ad residuum $d\ g$ est sicut $g\ b$ ad $b\ a$, quod oportebat ostendere.

Hoc idem demonstraretur si numerus $a\ g$ esset impar, quia que proportio est numeri $b\ g$ ad $b\ a$, eadem dupli $g\ b$ ad duplum $b\ a$. Vnde numerus $e\ z$ ostenderetur equalis numero $k\ l$ etc. Ex hoc enim ostendetur quod nullus quadratus numerus potest esse congruum; quia si possibile esset, etiam esset proportio coniuncti duorum adiacentium numerorum ad residuum, sicut maior eorum ad minorem.

Quare subintelligitur multos numeros esse qui congruum esse non possunt; sed omnis numerus potest esse congruum, si ex diuisione alicuius congrui per ipsum proueniat numerus quadratus, uel si ipse fuerit unus ex IIII.or adiacentibus, et reliqui tres fiant quadrati; ut si ponamus. 9. et. 16. qui sunt quadrati, et coniunctus ex

(1) È chiaro doversi leggere $k\ c$ in vece di $k\ m$ nella linea quarta di questa pagina 98. Tuttavia il testo latino del *Liber quadratorum* di Leonardo Pisano nel Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore* (carta 31 *verso*, lin. 11) ha ·kn· & km·

Il Codice *L. IV.* 21 della Biblioteca pubblica Comunale di Siena (carta 495 *verso*, lin. 20) ha kn· ⁊ km, ed il Codice E. 5. 5. 18, dell' I. e R. Biblioteca Palatina di Firenze (carta 274 *recto*, lin. 21) ha kn· ⁊ km· nei passi corrispondenti a questo passo del suddetto Codice Ambrosiano.

eis, scilicet 25. est quadratus, et auferatur 9 de 16, remanent. 7., qui. 7. potest esse congruum: multiplicatio quidem dupli de. 9. in duplum de. 16. facit quadratum numerum, scilicet. 576. qui si multiplicetur per 25. faciet iterum quadratum numerum, qui si ducatur per. 7. faciet congruum: ergo. 7.ma eius pars erit quadrata.

Volo inuenire numerum quadratum, cui addita radice ipsius faciat quadratum numerum, et si ipsa radix aufferatur ab eo, remaneat similiter numerus quadratus.

Adiaceat congruum similiter cum suis tribus quadratis, qui sunt numeri *a b*, *a g*, *a d* (1). Quare congruum erit numerus *b g*, et *g d*, et diuidatur unusquisque quadratorum | *a b*, *a g*, *a d* per congruum *b g*, et proueniant numeri *e z*, *e i*, *e h*, et constituatur super *e i* tetragonum *e k*, et compleatur superficies *l h*, et a puncto *z* equidistans rectis *i k* et *e l* protrahatur recta *z t*: et quoniam numerus *e z* prouenit ex diuisione numeri *a b* per *b g*, et numerus *e i* prouenit ex diuisione numeri *a g* in congruum *b g*, numerus quidem *z i* prouenit ex diuisione *b g* in se ergo *z i*, est 1. Similiter, quia diuiso *a d* per congruum *g d*, hoc est per *b g*, prouenit numerus *e h*, et ex diuisione *a g* in *g d*, prouenit *e i*. Ergo *i h* proueniet et ex diuisione *g d* in se. Quare *i h* est similiter. 1.: equalis est ergo *h i* recte *i z*; et quoniam super rectam *e i* constitutum est tetragonum *e k*, et *h i* est. 1., superficies itaque *k h*, uel *k z*, est radix tetragonj *e k*. Ergo super tetragonum *e k* addatur eius radix, scilicet superficies *k h*, proueniet superficies *l h*; et si ex quadrato *e k* aufferatur eius radix, que est *k z*, remanebit superficies *z l*: et quoniam ex diuisione numerorum *a b* et *a g* et *a d* in aliquem fol. 31 recto.

(1) Vedi Fig. 30.

numerum, scilicet in $b\,g$, prouenerunt numeri $e\,z$, $e\,i$, $e\,h$. Est ergo sicut $a\,b$ ad $a\,g$, ita $e\,z$ ad $e\,i$; sunt enim quadrati numeri $a\,b$ et $a\,g$: ergo proportio numeri $e\,z$ ed $e\,i$ est sicut proportio quadrati numeri ad quadratum numerum. Quare ex ductu $e\,z$ in $e\,i$ proueniet quadratus numerus. Sed $e\,i$ recte equalis est recta $z\,t$, cum sit equalis recte $i\,k$, tetragonum enim est superficies $e\,k$: ergo superficies $e\,t$ est quadratus numerus.

Similiter, quoniam proportio $e\,i$ ad $e\,h$, hoc est $l\,e$ ad $e\,h$, est sicut quadrati numeri ad quadratum numerum; factus quidem ex numeris $e\,h$, $l\,e$ quadratus erit, hoc est superficies $l\,h$. Inuenctus est enim quadratus numerus $e\,k$, cui addita radice, que est $k\,h$, prouenit quadratus numerus $l\,h$, et si ex quadrato $e\,k$ auferatur eius radix, remanebit quadratus numerus $e\,t$, quod oportebat facere.

Similiter si oportuerit inuenire quadratum numerum, cui additis duabus radicibus, uel diminutis ab eo, fiat semper quadratus numerus, diuidantur tunc adiacentes quadrati $a\,b$, $a\,g$, $a\,d$, per dimidium congrui $b\,g$, et proueniant numeri $e\,z$, $e\,i$, $e\,h$, et erit numerus $z\,i$. 2., cui equabitur numerus $i\,h$: quare unaqueque superficierum $k\,h$ et $k\,z$ erit equalis duabus radicibus quadrati numeri k, et erit similiter proportio $e\,z$ ad $z\,t$ sicut quadrati $a\,b$ ad quadratum $a\,g$. Quare numerus qui fit ex $e\,z$ in $z\,t$, hoc est superficies $e\,t$, quadratus est; propter eandem et superficies, scilicet numerus $l\,h$, est quadratus: inuentus est ergo quadratus $e\,k$, cui additis duabus radicibus, scilicet $k\,h$, prouenit quadratus numerus $l\,h$, et demptis ab eodem $e\,k$ duabus radicibus, scilicet $k\,z$, remanet qua-
fol. 32 verso. dratus numerus $z\,l$; hoc idem intelligas | de tribus, uel pluribus radicibus additis, uel diminutis.

Et ut hec in numeris habeantur, quadratus *a b* sit. 1., et quadratus *a g* sit. 25., quadratus quoque *a d* sit. 49.: erunt ergo congruum *b g*, uel *g d*. 24. in quo diuidantur 1 et 25 et 49, proueniet *e z*. $\frac{1}{24}$, et *e i* erit $\frac{1}{24}$ 1; numerus quoque *e h* erit $\frac{1}{24}$ 2.: ex ductu quidem *e i* in se prouenit quadratum *e k*, quod est $\frac{625}{576}$, cui si addatur id quod fit ex *k i* in *i h*, scilicet $\frac{1}{24}$ 1, proueniet $\frac{1225}{576}$, cuius radix est $\frac{35}{24}$ hoc est $\frac{11}{24}$ 1; similiter si auferatur $\frac{1}{24}$ 1, hoc est $\frac{600}{576}$ ex $\frac{625}{576}$, hoc est numerus *k z* ex numero *k e*, remanebit pro superficie *e t* $\frac{25}{576}$, quorum radix est $\frac{5}{24}$, et si super quadratum aliquem proponatur addi et diminui duas radices, duplicabis quidem numeros *e z*, *e i*, *e h*, prouenient $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{12}$ 2 et $\frac{1}{12}$ 4., qui etiam prouenient si diuidatur. 1. et 25 et 49. per dimidium congruum, scilicet per 12, et sic radix quesiti quadrati erit $\frac{1}{12}$ 2, et sic intelligas de tribus, uel pluribus radicibus additis et diminutis.

Omnium trium quadratorum, qui sunt continui impares, maior quadratus addit super medium octo plus quam medius super minorem. Adiaceant tres radices *a b*, *b g*, *g d* (1) trium datorum quadratorum, qui sunt impares et continui, et sit radix *a b* minor quam *b g*, et *b g* minor quam *d g*, dico quadratum, qui fit á numero *g d*, addere octo plus super quadratum, qui fit á numero *b g*, quam addat quadratus qui fit á numero *b g* super quadratum qui fit á numero *a b*.

Quare numeri *a b*, *b* g, *g d* sunt radices trium continuorum quadratorum imparium; impares quidem sunt et continui. Quare *b g* superhabundat *a b* in duobus, et in tot superhabundat numerus *g d* numerum *b g*. Aufferantur ergo duo á numero *b g*, remaneatque ex eo numerus *b*;

(1) Vedi Fig. 31.

propter eandem si a numero $g\ d$ auferantur duo, scilicet numerus $c\ d$, remanebit $g\ c$ equalis numero $b\ g$. Rursus si á numero $c\ g$ aufferatur numerus $g\ f$. equalis utrique numerorum $a\ b$, $b\ e$, remanebunt duo pro numero $f\ c$: quare totus $f\ d$ est 4. Et quoniam numerus $g\ e$ est id in quo numerus $b\ g$ superhabundat numerum $a\ b$, et est $e\ g$ duo: addit ergo quadratus, qui fit á numero $b\ g$, super quadratum, qui fit á numero $a\ b$, duplum numerorum $a\ b$, $b\ g$, hoc numeri $a\ g$. Similiter et quadratus, qui fit á numero $g\ d$, addit super quadratum $b\ g$ duplum numerorum $b\ g$, $g\ d$; ergo quot excedit duplum numerorum $b\ g$, $g\ d$ duplum numerorum $a\ b$, $b\ g$, tot excedit numerus qui est inter quadratos, qui fiunt á numeris $g\ d$, $g\ b$, numerum qui est inter quadratos, qui fiunt á numeris $g\ b$, $b\ a$, comuniter aufferatur duplum numeri $b\ g$, fol. 33 recto. quot | ergo superhabundat duplum numeri $g\ d$ duplum numeri $a\ b$, tot superhabundat numerus qui est inter quadratos, qui fiunt á numeris $d\ g$, $g\ b$, numerum qui est inter quadratos qui fiunt á numeris $g\ b$, $b\ a$. Sed duplum numeri $a\ b$ est sicut duplum numeri $g\ f$; ergo duplum numeri $g\ d$ superhabundat duplum numeri $a\ b$, hoc est duplum numeri $g\ f$ in duplo numeri $f\ d$. Sed duplum numeri $f\ d$ est octo, quaternarius est enim $f\ d$; ergo quadratus, qui fit á numero $g\ d$, addit octo super quadratum, qui fit á numero $b\ g$, plus quam addat quadratus qui fit á numero $b\ g$ super quadratum qui fit á numero $b\ a$, ut oportebat ostendere.

Et quoniam secundus quadratus impar, scilicet 9. addit unum octonarium super primum quadratum imparem, scilicet super. 1. inuenietur ex his tertium quadratum imparem, scilicet 25. addere duos octonarios super se-

cundum quadratum imparem ; et sic semper inuenietur ordinata ascensio quadratorum imparium ascendere per ascensionem numerorum qui ascendunt per octonarium : hoc idem accidit in quadratis parium numerorum preter ascensionem secundi quadrati paris, scilicet 16. qui addit. 12. super primum quadratum parem, scilicet super. 4.: deinde pares quadrati ascendunt per octonarios in infinitum numerando supra. 12. vel secundus quadratus par addit super primum quadratum parem tres quaternarios, et tertius super secundum addit quinque quaternarios, et quartus super tertium septem quaternarios, et quintus super quartum nouem, et sic semper adduntur duo quaternarij per ascensionem imparium numerorum usque in infinitum secundum hanc proportionem. Vel primus quadratus parium, scilicet 4. constat ex uno quaternario. Secundus super primum addit tres quaternarios. Tertius super secundum quinque, et sic inuenitur pares quadratos ascendere per ascensionem quaternariorum que ascendit per impares numeros ordinate. Similiter inueni quadratos numerorum qui ascendunt per ternarium ordinate, ascendere per ascensionem nouenariorum qui ascendunt similiter per impares numeros. Verbi gratia quadratus ternarij est semel. 9. Sexnarij addit super primum tres nouenarios, cum sit 36. super quem quadratus nouenarij addit quinque nouenarios. Sequens uero, scilicet quadratus duodenarij, addit. 7. nouenarios super quadratum nouenarij, et sic deinceps. Illud idem inuenj ex ascensione quadratorum, qui sunt á numeris ascendentibus per quaternarium, et per alios numeros in infinitum, ex quibus omnibus collegi solutiones quarundam sequentium questionum.

Volo inuenire in data proportione duas differentias trium quadratorum. Esto data proportio numeri *a* ad numerum *b* (1), et sint numeri *a b* primj ad se inuicem, numeri quidem *a b* aut sunt continui, aut non. Sint primum continui, et esto numerus *b* maior quâm *a*, et adiaceat unitas *c*, et ab unitate *c* in ordine disponantur tot numeri impares, quot sunt unitates in numero *b* maiori, qui sunt *d, e, f, g*, et accipiantur quadrati numerorum *e f g*, qui sint numeri *h i k*, dico quod proportio differentie, que est inter quadratum *h*, et quadratum *i* ad differentiam, que est inter quadratos *i k*, est sicut numerus *a* ad numerum *b*, quod ita probatur. Quoniam unitas est *c*, et ab ipsa depositi sunt numeri impares ordinate *d, e, f, g*, erit *d*. 3. et *e* 5. et *f*. 7 et *g*. 9. et quadratus qui fit à numero *e*, scilicet numerus *h* est 25. et quadratus qui fit á numero *f*, scilicet numerus *i*, est. 49. et quadratus qui fit á numero *g*, scilicet numerus *k*, est 81.; et quia numeri *d, e, f, g* sunt secundum quantitatem unitatum, que sunt in numero *b*, et numeri *d, e, f, g* sunt ɪɪɪɪ^or^, erit manifestum quod numerus *b* est. 4. et numerus *a* est. 3. et manifestum quod quadratus qui fit á numero *d*, scilicet á ternario, addit super quadratum qui fit ab unitate *c* unum octonarium, et quadratus qui fit á numero *e* addit super quadratum numeri *d* duos octonarios. Et quadratus qui fit á numero *f*, scilicet numerus *i*, addit super quadratum qui fit á numero *e*, hoc est super numerum *h* tres octonarios, videlicet secundum quantitatem unitatum, que sunt á numero *a* nec non et quadratus qui fit á numero *g*, addit super quadratum qui fit á

(1) Vedi Fig. 32.

numero *f*, scilicet super quadratum *i*, quatuor octonarios, scilicet secundum quantitatem unitatum, que sunt in numero *b*; quare proportio differentię que est inter quadratos *h i*, ad differentiam, que est inter quadratos *i k*, est sicut *a* ad *b*, hoc est sicut. 3. ad 4. Et si numerus *a* esset. 10., et *b*. 11., secundum ea que dicta sunt, addendi essent simul 10. et 11. et 21, que inde proueniunt essent radix medianj quadrati: quare. 19. erit radix minoris quadrati, et 23 erit radix maioris. Sunt enim 19. et 21 et 23 continui impares, et est. 21. decimus numerus impar ab unitate. Quare quadratus qui fit ab ipso. 21. scilicet. 441. addit super quadratum qui fit á. 19. scilicet super 361. decem octonarios. Et quadratus qui fit á 23. cum sit undecimus numerus impar ab unitate, addit super quadratum qui fit á 21, scilicet 529, super 441 undecim octonarios; quare differentia, que est inter 361 et 441., scilicet. 80., est ad differentiam, que est inter 441 et 529. | scilicet ad 88. sicut. 10 ad 11. Nam quam proportionem habet. 80 ad 88. eamdem habet $\frac{1}{8}$ de 80. ad $\frac{1}{8}$ de 88. scilicet 10 ad 11, quod oportebat ostendere. fol. 34 recto.

Et si non sunt numeri *a b* (1) continui, erunt ipsi numeri aut impares collaterales, aut non. Sint primum collaterales impares, et quoniam quadrati, qui sunt á paribus numeris, ordinate ascendunt per quadruplicatam ascensionem imparium numerorum, ut 4., qui est quadratus binarij, scilicet primj paris numeri, qui ascendit per quantitatem unius quaternarij, et 16., qui est quadratus secundi paris numeri, scilicet quaternarij, qui surgit per quadruplicatam ascensionem duorum imparium

(1) Vedi Fig. 33.

numerorum, scilicet de. 1. et 3., erit manifestum quod unusquisque quadratus par addit duos quaternarios plus super antecedentem quadratum parem, super quaternarios, quos addit ipse antecedens quadratus super suum antecedentem quadratum, hoc quod tertius quadratus par addit super secundum quadratum parem quinque quaternarios, cum secundus quadratus par addit super primum tres quaternarios, scilicet. 16. super. 4. et quartus quadratus par addit super tertium quadratum septem quaternarios, et ita accidit omnibus per ordinem. Vnde cum uolumus inuenire duas differentias inter tres quadratos numeros, quarum proportio sit sicut duo numeri impares collaterales, ut dicamus, sicut. 11. est ad 13. Accipiemus inter pares quadratos continuos, quorum medianus quadratus addat super antecedentem quadratum parem. 11. quaternarios. Qui tres quadrati ita possunt inuenirj. Addantur. 11. cum. 13, erunt. 24., quorum quarta pars multiplicetur per. 2, scilicet per radicem primj paris quadrati, erit 12. qui sunt radix medianj quadrati, et 10 erit radix primj quadratj, et 14 erit radix secundi quadratj. possumus etiam hoc idem inuenire inter quadratos, qui fiunt á numeris ascendentibus per ternarium. Verbi gratia, uolumus inuenire duas differentias inter tres quadratos numeros, quarum proportio sit sicut 19. est ad. 21. qui sunt collaterales impares, addemus. 19. [cum .21. et 40. que proueniunt, diuidemus per 4. et 10, que inde proueniunt multiplicabimus per 3, scilicet per radicem primj quadratj ipsius ordinis, erunt .30., que erunt radix medianj quadratj. Quare radix minoris quadrati erit. 27, et radix maioris erit. 33. Nam quadratus qui fit á 30., scilicet 900. addit super quadratum qui fit ad 27, scilicet super 729, no-

uenarios. 19. et quadratus qui fit á .33., scilicet. 1089, addit super. 900. nouenarios. 21. et sic proportio differentię, que est inter 729 et 900. scilicet 171. est ad differentiam que est | inter 900 et 1089, scilicet ad 189, sicut 19 ad 21, fol. 34 verso. hoc uolumus; quod etiam inuenietur inter quadratos, qui fiunt á numeris ascendentibus per quaternarium, uel quinarium, uel per alium quemlibet numerum.

Et si proportio duarum differentiarum, que sunt inter tres quadratos, fuerit sicut aliquis quadratus a ad aliquem quadratum b, uoluero ipsos tres quadratos inuenire. Ponam numerum c (1) medium inter a b in proportione continua cum possibile. Quia, ut in Euclide habetur, inter duos quadratos numeros unus medius intercidit numerus, et procreabitur numerus c ex multiplicatione radicis numeri a in radicem numeri b, et erit sicut a ad c, ita c ad b, et sicut c est ad b, ita b sit ad d, et erunt numeri a, c, b, d, continue proportionales, quare erit sicut a ad b, ita c ad d, et sit quadratus numeri a numerus $e\,f$, et quadratus numeri c, numerus $e\,g$. Insuper et quadratus numeri b numerus $e\,h$, dico differentias, que sunt inter quadratos $e\,f$, et $e\,g$, et $e\,h$, scilicet numeri $f\,g$, et $g\,h$, proportionem habere ad se inuicem eam, quam habet quadratus numerus a ad quadratum numerum b, quod sic probatur. Quoniam numeri a, c, b continuo proportionales sunt, est sicut a primus ad b tertium, ita quadratus numeri a primi, ad quadratum numeri c secundi, ut in geometria aperte monstratum est. Est enim quadratus numeri a numerus $e\,f$, et quadratus numeri c numerus $e\,g$, ergo est sicut a ad b, ita numerus $e\,f$ ad numerum $e\,g$. Rursus quoniam numeri c, b, d continue proportionales, est sicut c ad d,

(1) Vedi Fig. 34.

ita quadratus numeri *c*, scilicet numerus *e g*, ad quadratum numeri *b*, scilicet ad numerum *e h*. Sed sicut *c* est ad *d*, ita fuit *a* ad *b*, ergo sicut *a* ad *b*, ita numerus *e g*, ad numerum *e h*, fuit etiam sicut *a* ad *b*, ita *e f* ad numerum *e g*. Numeri ergo *e f*, et *e g*, et *e h*, continue proportionales sunt. Et quoniam est sicut *e f* ad *e g*, ita *e g* ad *e h*, disiunctim ergo erit sicut *e f* ad *f g*, ita *e g* ad *g h*, permutatim ergo sicut *e f* ad *e g*, ita *f g* ad *g h*, sed *e f* ad *e g* est sicut *a* ad *b*, ergo sicut *a* ad *b*, ita *f g*, scilicet differentia que est inter quadratos *e f* et *e g*, est ad *g h*, scilicet ad differentiam que est inter quadratos *e g* et *e h*, que etiam ostendantur cum numeris. Esto quidem numerus *a*. 16. et numerus *b*. 25., quare numerus *c* erit. 20., qui procreatur ex ductu radicis de 16, in radicem de. 25. et est sicut. 16. ad. 20. ita. 20 ad. 25. et erit quadratus numeri *a*, scilicet numerus *e f*., 256. et quadratus numeri *c*, scilicet numerus *e g*. 400. et quadratus numeri *b*, hoc fol. 35 recto. est numerus *e h*, | est. 625. vnde si ex *e g* auferatur *e f*, remanebunt. 144. pro numero *f g*, et si auferatur quadratus *e g* ex quadrato *e h*, scilicet. 400. de. 625. remanebunt. 225. pro numero *g h*, sunt enim. 144. ad 225. sicut. 16. sunt ad 25., et hoc uolui demonstrare.

Et Si data proportio duarum differentiarum cadentium inter tres quadratos non fuerit aliqua suprascriptarum, videlicet ex continuis, uel ex imparibus collateralibus numeris, aut ex duobus quadratis solutionem quarum ex ascensione octonariorum cadentem inter quadratos impares, que fit ex numeris continue ascendentibus ab unitate, ex ascensione quaternariorum cadente inter pares quadratos numeros, que fit ex numeris ab unitate ascendentibus per impares numeros inueniemus hoc ordine. Ponamus ut

proportio duarum differentiarum cadentium inter tres quadratos numeros, fiat sicut. 2. est ad 9.

Accipiam primum quadratum qui fit á quinario, qui addit super quadratum sibi antecedentem imparem duos octonarios. Et habebo ipsum pro primo quadrato, si possibile fuerit, et proportionabo ipsos duos octonarios cum octonarijs, quos addit sequens quadratus impar super quadratum quinarij, scilicet cum. 3. octonarijs, et quia proportio de. 2. ad 3. non est sicut. 2. ad 9, super tres octonarios addam quatuor octonarios, quos addit quadratus nouenarij super quadratum septenarij, et erunt septem octonarij, et erit proportio duorum octonariorum ad septem octonarios sicut. 2. ad. 7. Sed proportio de. 2. ad. 7. est maior proportione quam habet. 2. ad 9. Quare super. 7. octonarijs addam multitudinem octonariorum additionis sequentis imparis quadrati, eius videlicet qui fuit ab. 11. erunt octonarij. 12. ad quem numerum, cum duo habeant minorem proportionem quam ad. 9. duplicabo numeros proportionis, scilicet. 2. et. 9. et habebo 4. et. 18. Et considerabo proportionem quam habet. 4. ad sequentem sibi numerum, scilicet ad. 5. uel ad duos sequentes numeros, scilicet ad. 5 et ad 6. uel ad tres sequentes numeros, donec inueniam inde proportionem quam habet. 4. ad. 18. et hoc erit cum accepero á quaternario tres sequentes numeros, scilicet. 5. et. 6. et. 7. qui faciunt. 18. ad quem numerum. 4. habet proportionem eam quam habet. 2. ad. 9. et propter hoc inuenta est solutio questionis, et habebo pro maiorj quadrato ipsum qui est a 15. scilicet 225. que. 15. habentur ex duplo de 7, uno addito, et est quadratus, qui fit á 15, addens super quadratum, qui fit ad 13, septem octonarios, | et quadratus, qui fit á 13, addit super quadra- *fol. 33 verso.*

tum qui fit ab 11., sex octonarios, et quadratus, qui fit ab 11., addit super quadratum qui fit á 9 quinque octonarios, et sic quadratus, qui fit ad 15, addit super quadratum qui fit á 9 octonarios .18., et quadratus, qui fit á 9, addit super quadratum qui fit á 7 quatuor octonarios, et sic proportio differentiae, que est inter quadratum qui fit á 7, et quadratum qui fit á 9. scilicet inter .49. et 81. erit ad differentiam, que est inter 81 et 225, sicut .2. ad 9, et hoc est, quod uoluj demonstrare.

Soluuntur etiam omnes suprascriptae questiones, et eorum consimiles, in quadratis qui fiunt á duplo, uel á triplo, uel á quolibet alio multiplice numerorum, á quibus fiunt quadratj suprascriptorum inuentionum. Verbi gratia, fuerunt quadrati suprascriptae questionis à 7 et à 9 et a 15. Quare si dupricauimus hos tres numeros habebimus pro radice minoris quadrati 14. et pro radice medianj. 18. et pro radice maioris 30. et erit similiter proportio differentiarum, que sunt inter quadratos qui fiunt ab ipsis numeris, sicut 2 ad 9., quod ostendam in lineis: sit linea *a b* (1). 49. scilicet quadratus septenarij, et *a c* sit 81. scilicet quadratus nouerarij, et *a d* sit quadratus qui fit á 15. et *e z* sit quadratus qui fit á 14. et *e i* sit quadratus qui fit á 18, et *e t* sit quadratus qui fit á 30. Et quoniam numeri, á quibus fiunt quadratj *e z*, *e i*, *e t*, dupli sunt numerorum, á quibus fiunt quadrati *a b*, *a c*, *a d*, erit unusquisque quadratorum *e z*, *e i*, *e t*, quadruplus sui similis, scilicet *e z* ex *a b*, et *e i* ex *a c*, et *e t* ex *a d*. Et quoniam totus *e i* ex toto *a c* quadruplus est, et *e z*, ex *a b* similiter est quadruplus, reliquus *z i* ex reliquo *b c* quadruplus est. Similiter ostendetur *i t* quadruplus esse

(1) Vedi Fig. 35.

ex *c d*, quare est sicut *b c* ad *c d*, ita *z i* ad *i t*. Est enim *b c* ad *c d* sicut 2 ad 9. et *z i* ad *i t* est similiter sicut. 2 ad 9. Similiter si numerij, á quibus essent quadrati *e z*, *e i*, *e t*, essent tripli numerorum, á quibus quadrati *a b*, *a c*, *a d*, esset unusquisque quadratorum *e z*, *e i*, *e t* nonuplus sui, similiter quare differentia *z i* esset nonupla ex differentia *b c*, et differentia *i t* ex differentia *c d*, quare esset sicut *b c* ad *c d*, ita *z i* ad *i t*, et hoc uolui demonstrare.

Et si proportio dvarum differentiarum, que sunt in tres quadratos, fuerit sicut. 11. est ad 43, erit primus quadratus. 25. Secundus 729. Tertius 3481., quos hoc ordine inuenj. Posui primum pro mediano quadrato quadratum | qui fit á 23, cum ipse addat 11 octonarios super quadratum qui fit á 21., et inuestigaui proportionem, quam habet. 11. ad primum sequentem sibi numerum, uel ad duos, uel ad plures, et non inuenj cum ipsis numeris proportionem, quam habet 11. ad. 43. quia si addatur 12 et 13 et 14, qui secuntur. 11. in ordine numerorum, non faciunt ultra. 39. ad quem numerum. 11. habet maiorem proportionem quam ad 43. et si cum ipsis 39. addatur sequens numerus scilicet. 15. veniunt 54. ad quem numerum. 11. habet minorem proportionem quam ad 43. et propter hoc duplicauj. 11. et 43 et triplicauj etiam, et per unumquemque numerorum qui sunt usque in. 7. multiplicauj eos, et non inuenj inter continuos numeros proportionem quam querebam; ad extremum octuplicauj. 11. et. 43. et habui 88. et 344.; et diuisi. 88 per .11. et prouenerunt. 8. circa quem posui decem numeros sibi continuos, et fuit 8. medius inter eos, et fuerunt. 11. numeri. qui insimul aggregatj faciunt. 88, ex quibus minor numerus est. 3. maior. 13., et duplicauj 13., et addidj. 1. et

fol. 36 recto.

prouenerunt. 27. cuius quadratus addit octonarios. 13., super quadratum qui fit á 25, et quadratus qui fit á 25 addit 12 octonarios super quadratum, qui fit a 23, et sic inuestigando inuenj quadratum qui fit á 27 addere super quadratum qui fit a 5, octonarios. 88., qui proueniunt ex aggregatione numerorum, qui sunt á 13 usque in. 3. scilicet ex undecim numeris ordinatis.

Deinde accepi. 14. cum suis sequentibus numeris usque in 29, et aggregauj eos, et habui 344., scilicet octuplum de 43., et super duplum de 29. addidj. 1. et habui. 59. pro radice maioris quadratj, scilicet de. 3481, qui addidit octonarios. 29. super quadratum sibi antecedentem imparem, scilicet super eum qui fit á. 57. qui quadratus addit super quadratum qui fit á 55. octonarios 28. et sic addendo omnes octonarios, quos addunt antecedentes quadratj, qui sunt à quadrato qui fit á 59, vsque ad quadratum qui fit á 27 super suos consequentes, collegj quadratum, qui fit á 59. addere super quadratum, qui fit á. 27. octonarios 344., quare proportio differentię que est inter quadratum qui fit á quinario, et quadratum qui fit á 27, est ad differentiam, que est inter quadratum qui fit á 27., et quadratum qui fit á 59, sicut. 11. ad 43, que etiam proportio inuenietur in quadratis qui sunt á duplo, uel ab | alio quolibet multiplice radicum in-
fol. 36 verso. uentarum.

Volo inuenire tres quadratos numeros, ut additio primj et secundi, nec non ipsorum trium numerorum, faciat quadratum numerum. Inueniam primum duos quadratos numeros, ex quorum addictione proueniat quadratus numerus, et fiant á numeris primus ad se inuicem. Sintque 9 et 16, ex quorum additione proueniunt 25., qui est qua-

dratus numerus, et accipiam quadratum, qui colligitur ex aggregatione omnium imparium numerorum, qui sunt infra. 25., qui quadratus est. 144 cuius radix est medietas duorum extremorum ipsorum imparium numerorum, scilicet de. 1. et 23. Ex aggregatione quidem de 144 et 25 proueniunt. 169.,.qui numerus quadratus est, et sic inuenti sunt tres numeri quadratj, quorum duo nec non et omnes simul aggregatj faciunt quadratum numerum, super quem etiam quadratum si addatur quadratus numerus, qui colligitur ex omnibus imparibus numeris, qui sunt ab uno usque in 167., cuius quadrati radix est. 84., scilicet medietas de 168, proueniunt 7225, qui numerus est quadratus, et eius radix est 85, et sic inuenti sunt quatuor quadratj, quorum duo, uel tres, nec non et omnes simul coniuncti, faciunt quadratum numerum, super quibus etiam 7225. possumus tres quadratos diuersos addere, et cum unoquoque ipsorum faciet quadratum numerum, ex quibus primus est quadratus proueniens ex omnibus imparibus numeris, qui sunt infra. 7225., cuius radix est 3612. Secundus uero quadratus prouenit ex aggregatione omnium imparium numerorum, qui sunt sub quinta parte de 7225., detractis inde duobus imparibus eidem quinte parti collateralibus, cuius quadrati radix est 720. Tertius quidem quadratus prouenit ex imparibus omnibus qui sunt sub $\frac{1}{15}$ de 7225, dentis ex eis duodecim imparibus ipsius $\frac{1}{15}$ partis collateralibus, cuius quadratj radix est 132., et sic possunt infinitj quadratj numeri inuenirj, qui disiuncti, et simul agregatj, secundum istum ordinem, facient numerum quadratum.

Questio mihi proposita a magistro Theodoro domini imperatoris phylosopho.

Volo inuenire tres numeros, qui insimul aggregati cum quadrato primj numeri faciant quadratum numerum. Super quem quadratum si addatur quadratus secundi, egrediatur inde quadratus numerus, cum quo quadrato addito quadrato tertij, similiter quadratus numerus inde proueniat. Inueniendi sunt primj tres numeri quadratj, quo-
fol. 87 recto. rum duo simul aggregati faciant quadratum numerum | ex aggregatione ipsorum trium ueniat item quadratus numerus. Et minor eorum sit plus radicibus reliquorum duorum quadratorum. Sintque 36 et 64 et 576, et erit radix secundj numeri. 8., tertij. 24., que radices habeantur pro secundo et tertio numero quesitorum trium numerorum, et ponam pro primo numero radicem, et aggregabo hos tres numeros simul, et habebo 32 et radicem, super quem addam quadratum radicis, et habebo 32 et quadratum et radicem, que omnia uolo ut equentur primo posito quadrato, scilicet. 36., et auferam ab utraque parte 32, et remanebunt quadratus et radix equales IIII^{or}. unitatibus. Vnde qualiter in similibus operandum sit, ponam pro quadrato quadratum *a c* (1), cuius unumquodque latus sit equale posite radicis, et addam ei superficiem *d e* rectiangulam, que sit una radix quadratj *a c*, quare *c e* erit. 1., et *d c* est radix, cum sit unum ex lateribus quadrati *a c*,

(1) Vedi Fig. 36.

et dimidiabo *c e* super *f*, et erit unaqueque sectionum *c f* et *f e* medietas unius.

Et quia inuenimus quadratum et radicem equari IIII^or. unitatibus, erit manifestum quod superficies *a e* rectiangula erit. 4., que superficies prouenit ex *a b* in *b e*, hoc est ex *b c* in *b e*, et quia linea *c e* diuisa est in duo equa super *f*, et in directo eius addita est quedam recta *c b*, erit superficies *b c* in *b e*, cum quadrato lineę *c f*, equalis quadrato lineę *b f*. Sed ex *b c* in *b e* proueniunt. 4., quibus si addatur quadratus numeri *c f*, qui est $\frac{1}{4}$, habebuntur $\frac{1}{4}$ 4 pro quadrato numerj *b f*, qui numerus cum non habeat radicem, dicemus numerum *b f* esse radicem de $\frac{1}{4}$ 4, de quo si auferatur numerus *c f*, qui est $\frac{1}{2}$ unius, remanebit pro radice *b c* radix de $\frac{1}{4}$ 4 minus $\frac{1}{2}$ unius, qui numerus quamuis sit inratiocinatus, habebitur pro primo numero quesito, et secundus erit. 8., tertius 24. Verbi gratia, ex aggregatione quidem horum trium numerorum habentur $\frac{1}{2}$ 31, et radix de $\frac{1}{4}$ 4, super quam aggregationem si addamus quadratum primj numeri, qui est $\frac{1}{2}$ 4 minus radice de $\frac{1}{4}$ 4, habebuntur 36, qui numerus quadratus est. Super quem si addantur. 64., scilicet quadratus secundj numeri, uenient 100., qui numerus quadratus est, et radix eius est. 1 nS0.per quem quadratum si addantur 576, scilicet quadratus tertij numeri, habebuntur 676, qui numerus quadratus est, et radix eius est 26., et hoc uolumus.

Et ut solutio questionis suprascriptę habeatur in numeris ratiocinatis, ostendendum | est primum, quod quando fol. 37 verso. quarta unius integrj additur super aliquem numerum contemptum sub duobus numeris ratiocinatis, quorum unus excedat alterum in. 1., procreatur inde quadratus nume-

rus, quod ostendatur in superficie $a\ g$ (1), que contineatur sub duobus numeris ratiocinatis, quorum maior excedat alterum in. 1., qui sunt $a\ b$ et $b\ g$, et maior eorum esto $b\ g$, et auferatur á maiorj $b\ g$ unitas $g\ d$, remanebit numerus $b\ d$ equalis numero $a\ b$, et diuidatur unitas $g\ d$ in duo equa super e, et erit $d\ e$ medietas unius integrj. Quare $d\ e$ medietas est ratiocinata, est enim et numerus $b\ d$ ratiocinatus. Quare totus $b\ e$ numerus ratiocinatus est, et quadratus, qui fit ab ipso, ratiocinatus est, cuj quadrato equatur superficies, que fit ex $b\ d$ in $b\ g$, hoc est ex $a\ b$ in $b\ g$, cum quadrato qui fit á $d\ e$. Sed quadratus, qui fit ex $d\ e$, est $\frac{1}{4}$ unius, et numerus, qui prouenit ex $a\ b$ in $b\ g$, est contemptus sub duobus numeris ratiocinatis, quorum unus excedit alium in 1. Ergo cum additur $\frac{1}{4}$ cum numero facto á duobus numeris, quorum unus addat super alterum. 1., prouenit inde quadratus numerus, et hoc uolui demonstrare.

Et notandum quod omnes numeri integri, qui fiunt á duobus collateralibus, scilicet continuis, proueniunt ex ordine, ex ordinata parium numerorum aggregatione. Nam. 2., qui prouenit ex unitate ducta in. 2., habetur ex primo parj numero, et 6, qui fiunt ex ductis 2. in 3., habentur ex aggregatione primorum duorum parium numerorum, et. 12., que ueniunt ex 3 ductis in. 4., habentur ex aggregatione trium parium numerorum, scilicet de. 2 et 4 et 6., et hoc eodem ordine ex decem paribus numeris prouenit numerus factus ex 10 uicibus 11, quod idem intelligatur in omnibus reliquis numeris, qui fiunt á duobus continuis

(1) Vedi Fig. 37.

numeris integris. Et sciendum quod omnis impar numerus est aggregatio duorum numerorum continuorum. Vnde quilibet impar numerus potest diuidj in duos numeros continuos, ut 7. qui diuiditur in. 3. et 4.

Nvnc ostendere uolo quod quando de aliquo quadrato numero tolluntur aliquot radices eius, et numerus ipsarum radicum diuidatur in duas partes, quarum una addat super alteram. 1., et multiplicetur una ipsarum partium per aliam, et quod prouenerit addatur cum residuo quod de quadrato remanet, radicibus dentis, veniet inde numerus contemptus sub duobus numeris inequalibus, quorum maior addit. 1. super minorem. Ad quod demonstrandum. Adiaceat | tetragonum *a g* (1), et tollatur (*sic*) ex eo aliquot radices eius, que radices contineat (*sic*) superficiem *e g*, quare numerus *f g* continet tot unitates, quot radices ex quadrato *a g* sunt in ruperficie *e g*, et diuidatur numerus *f g* in duas partes, quarum maior addat 1. super minorem, que sint *f i*, *i g*, et maior earum sit *i g*. Dico quod cum de quadrato *a g* tollitur superficies *e g*, residuum, scilicet superficies *a f*, cum superficie, que fit ex *i f* in *i g*, facit numerum factum ex duobus inequalibus numeris, quorum maior addit. 1. super minorem, et hoc est de quadrato *a g* tollere superficies *e g*, minus superficie que fit ex *i f* in *i g*. Ponamus siquidem numerum *g h* equalem numero *i f*, et remanebit *i h* unum, quod diuidatur in duas medietates, que sunt *z i*, *z h*, et erit totus *f g* diuisus in duo equalia super *z*, et in duo inequalia super *i*. Quare multiplicatio *f i* in *i g* cum quadrato, qui fit ab fol. 33 recto

(1) Vedi Fig. 38.

i z, equatur quadrato numeri *f z*. Rursus quoniam numerus *f g* diuisus est in duo equa super *z*, et ei additus est numerus *b f*, erit multiplicatio *b g* in *b f*, hoc est multiplicatio *a b* in *b f*, cum quadrato numeri *f z*, equalis quadrato numeri *b z*. Sed quadrato numeri *f z* equalis est superficies *f i* in *i g*, cum quadrato, qui fit ab *i z* medietate. Ergo multiplicatio *a b* in *b f*, hoc est superficies *a f*, cum multiplicatione *f i* in *i g*, et cum quadrato numeri *i z*, equatur quadrato numeri *b z*. Rursus quoniam *i h* unitas diuisa est in duo equa super punctum *z*, et ei additus est numerus *b i*, erit multiplicatio *b i* in *b h*, cum quadrato *i z*, equalis. sed quadrato *b z* equales sunt superficies *a f* et superficies *f i* in *i g*, cum quadrato *i z*; ergo superficies *b i* in *b h*, cum quadrato *i z*, equalis est superficiebus *a f* et *f i* in *i g*, et quadrato *i z*. Comuniter aufferatur quadratus ex *i z*, remanebit superficies *a f*, cum superficie *f i* in *i g*, equalis superficiei *b i* in *b h*, sed superficies *b i* in *b h* fit ex duobus numeris, quorum unus addit. 1. super alterum, qui sunt *b i* et *b h*, est enim *i h* 1. Que etiam ostendatur, cum numerus quadratus quidem *a g* sit 100, et erit unumquodque latus. 10., et auferantur a quadrato *a g*. 7. radices eius minus multiplicatione *f i* in *i g*, que radices sint superficies *e g*, remanebit superficies *a f* 30, cum quibus si addatur multiplicatio *f i* in *i g*, hoc est de. 3. in. 4., uenient. 42., qui numerus surgit ex *b i* in *b h*, hoc est de 6 in. 7. fol. 88 verso. est | enim totus *b g*. 10., de quibus si auferatur *f g* numerus, qui est. 7., remanent. 3. pro numero *b f*, quibus si addatur *f i*, qui est. 3., erit. 6. totus numerus *b i*, cui si addatur unitas *i h* habebuntur. 7. pro numero *b h*. ET

postquam hec omnia demonstrata sunt, redeamus ad questionem phylosophi, et procedamus predicto modo, donec habeamus quod census et radix et 32 equantur quadrato de 36. deinde uideamus quot radices sunt 32 de 36., hoc est quod diuidamus 32 per radicem de 36., venient radices $\frac{1}{3}$ 5. et propter hoc, ut inueniamus solutionem predictę questionis in posita proportione trium quadratorum (1) supradictorum, scilicet de 36 et de 64 et de 576. oportet ut inueniamus quadratum aliquem, de quo extractis radicibus $\frac{1}{3}$ 5. ipsius, remaneat numerus qui procreatur ex multiplicatione dictorum numerorum inequalium, quorum maior addat. 1. super minorem. Quod inueniemus si posuerimus numerum aliquot radicum superhabundantem predictas radices $\frac{1}{3}$ 5. Quod quidem possumus facere in infinitis modis. Vnde ponamus ad libitum radices. 7. et diuidamus. 7. in duas partes, quarum una addat. 1. super alteram, eruntque 3 et 4., et multiplicetur 3 per 4, fa-

(1) Ciò che si legge nella presente pagina (lin. 6–11), dalla terza lettera della parola *inueniamus*, fino a tutta la parola *inequalium*, forma le linee 8–11 della carta 38 *verso* del Codice Ambrosiano *E*, 75, *Parte superiore*. Presso a queste quattro linee, sul margine laterale esterno della medesima carta 38 *verso*, si trova la seguente postilla:

Un segno al tutto simile a quello contenuto in questa postilla trovasi fra le linee ottava e nona del medesimo *verso*, precisamente come nel seguente fac-simile:

ciunt. 12, et nos scimus per ea que dicta sunt, quod quando de aliquo quadrato tolluntur. 7. radices eius minus. 12. remanebit de ipso quadrato numerus procreatus ex duobus numeris inequalibus quorum maior addit. 1. super minorem. Et nos uolumus inuenire quadratum, de quo extractis radicibus $\frac{1}{3}$ 5 ipsius, remaneat similiter numerus procreatus ex duobus numeris, quorum unus addat, 1. super alium. Ergo radices $\frac{1}{3}$ 5 ipsius quadrati quem querimus, equantur radicibus. 7. eiusdem quadrati minus. 12., quare si addamus. 12. utrique partj, erunt radices $\frac{1}{3}$ 5 et 12 dragme, que equantur. 7. radicibus. Tollamus ergo ab utraque parte radices $\frac{1}{3}$ 5. remanebit radix $\frac{2}{3}$ 1, que equantur unitatibus. 12. Triplicemus ergo hec omnia, et erunt quinque radices equales. 36.; vnde si 36 diuiserimus per 5 habebimus $\frac{1}{5}$ 7. pro radice quesiti quadratj; scilicet primj. fuit quidem radix primj quadrati. 6., ergo proportionaliter est sicut. 6. ad $\frac{1}{5}$ 7, ita 8 et 24 ad radicem secundj et tertij quadrati. Sed $\frac{1}{5}$ 7 addit super 6, quintam partem ipsius, quare, si super 8 et super 24 addamus quintam eorum, habebimus pro radice secundi quadrati $\frac{3}{5}$ 9, et pro radice tertij $\frac{4}{5}$ 28, et erit $\frac{3}{5}$ 9 secundus numerus ex tribus quesitis numeris, et $\frac{4}{5}$ 28 erit tertius, et est adhuc primus fol. 39 recto. numerus ignotus, qui cum | fuerit additus cum secundo et tertio numero predictis, et cum quadrato ipsius primj numeri, faciet quadratum de $\frac{1}{5}$ 7, qui quadratus est $\frac{1}{5}\frac{4}{5}$ 51. Quare ponemus pro primo numero radicem, et addemus eam cum $\frac{3}{5}$ 9 et cum $\frac{4}{5}$ 28., et habebimus radicem et $\frac{2}{5}$ 38., quibus addemus quadratum radicis, et habebimus quadratum et radicem et $\frac{2}{5}$ 38., que equantur dragmis $\frac{1}{5}\frac{4}{5}$ 51. Tollamus ergo ab utraque parte $\frac{2}{5}$ 38, remanebit census et

radix, que equatur drâgmis $\frac{11}{25}$ 13, super quem addamus $\frac{1}{4}$, scilicet quadratum medietatis radicis, ut superius fecimus, et habebimus $\frac{9}{10}\text{-}\frac{6}{10}$ 13, que sunt centexime 1369., diuidamus ergo radicem de 1369., scilicet 37 per radicem de 100., uenient $\frac{7}{10}$ 3, de quibus tollamus $\frac{1}{2}$ pro mediatate radicis, remanebunt $\frac{1}{5}$ 3 pro primo numero, et sic soluta est hec questio in numeris ratiocinatis, et secundum hunc modum potest solui infinitis modis.

Solui etiam hanc questionem in numeris integris, quorum primus fuit 35., secundus 144. tertius 360., quorum aggregatio surgit in. 539., super quibus addito quadrato primj numeri scilicet 1225., ueniunt 1764., qui numerus quadratus est, et eius radix est. 42., super quo quadrato addito quadrato numeri secundi, qui est 20736, ueniunt 22500., qui numerus quadratus est, et radix eius est. 150., super quo quadrato addito quadrato tertij numeri, scilicet 129600., ueniunt. 152100., qui numerus quadratus est, et radix eius est. 390. Quos numeros inuenj ex positione horum trium quadratorum, scilicet de 49 et 576, et de 3600., quorum duo, nec non et ipsi tres simul additj, faciunt quadratum numerum. Et aggregaui radices secundi et tertij, scilicet 24 et 60, fuerunt 84., que diuisi per radicem primj quadrati, scilicet per 7., et uenerunt. 12., et propter hoc oportuit me inuenire quadratum numerum, de quo cum tollerem. 12 radices eius, remaneret numerus factus ex duobus numeris inequalibus, quorum unus adderet. 1. super alium. Vnde accepi. 13., et diuisi ipsum in partes continuas, scilicet in. 6. et 7. que multiplicaui insimul, et fuerunt 42.. et oportuit me inuenire quadratum, cuius 13. radices minus. 42. dragmis, equaretur. 12 radici-

bus eiusdem, et processi postea predicto ordine, et habui numeros suprascriptos, ex quibus etiam quadratis inuenj hos alios tres numeros, scilicet $\frac{2}{5}$ 10$\frac{1}{4}$, et 64, et 160. Et non solum per hunc modum tres numeri diuersis modis possunt inuenirj, sed etiam inuenientur quatuor cum quatuor numeris quadratis, quorum duo per ordinem, et fol. 39 verso. tres, nec non et omnes simul coniuncti | fecerint quadratum numerum. Ego autem cum his quatuor quadratis numeris, scilicet cum . . . . et . . . . et . . . . et . . . (1). Inueni hos quatuor numeros, quorum primus est 1295, secundus $\frac{4}{7}$ 4566, tertius $\frac{3}{7}$ 11417, quartus uero est 79920., et eorum aggregatio est 97199. Super quo numero si addatur quadratus primj numeri, scilicet 1677025, venient 1774224, qui numerus quadratus est, et eius radix est 1332. Super quo etiam quadrato (2)

(1) Le quattro lacune indicate con punti nella linea nona di questa pagina, trovansi nel rovescio della carta 39 del Codice Ambrosiano, *E.* 75 *Parte superiore.*

(2) La parte scritta del rovescio della carta 39 del Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte superiore*, finisce in tronco alla parola *quadrato*, non contando che otto linee, l' ultima delle quali è incompleta. Il rimanente di questo Codice, è interamente bianco.

Spiegazione delle postille marginali riportate di sopra in *fac-simile* a pag. 93, lin. 31–32; a pag. 96, lin. 23–24; a pag. 119, lin. 20–22, 29–30.

erit numerus qui proueniet ex eodem primo quadrato ducto in .49. cuius numeri radix erit numerus factus ex multiplicatione uel ex multitudine radicis primj quadrati in .7. qui est.

quadruplum quadrati facit quadratum numerum ergo quadruplum quadratj ductum in .5. facit quincuplum quadrati et ductu uel ductum quincuplo dicti quadra-

hucusque est scriptus quaternus **D. M. R.** cardinalis.

ueniamus solutionem predicte questionis in posita proportione trium quadratorum supradictorum scilicet de 36 et de 64 et de 576. oportet ut inue-

ERRORI CORREZIONI

2.ª Edizione Fir. 1856.				Cod. Ambr. E. 75. Par. sup.	
Pag.	lin.			carte	lin.
1.	17.	illa nobis	illa uobis	1 r.°	15
4.	5.	possunt: Et ideo	possunt: et ideo	2 r.°	3
5.	14.	unuquodque (*sic*)	unumquodque	»	34
7. in marg.		*fol.* 3 *resto*	*fol.* 3 *recto*		
11.	»	Bi . 3.ⁱ R.ˣ	Bi . 3.ⁱ R.ˣ	4 v.°	in m.
»	19	ex *e* in *g*	ex *e* in *z*	»	22-23
»	20-21.	numeri *g*	numeri *z*	»	23
28.	11.	Super	Svper	10 r.°	18
»	27.	sexcuplum	sexuplum	»	29
35.	24.	bizantijs	bizantii	12 v.°	1
37.	25.	hoc est $\frac{24}{340}$	hoc est $\frac{44}{340}$ (*sic*)	13 r.°	5
38.	29.	fecerat ei	fecerat eis	»	31
39.	27.	venient	uenient	» v.°	17
41.	25.	$\frac{8}{4}$ de quibus	$\frac{3}{4}$ de quibus	14 r.°	27
42.	18.	$\frac{4}{71}$	$\frac{4}{17}$	» v.°	9
43.	12-13.	parpartem	partem	»	28
44.	18.	Quidam	Qvidam	15 r.°	19
45.	8.	il lidenarij	illi denarij	»	32
46.	1.	uenient	ueniente (*sic*)	» v.°	12
»	20.	drenarios 10.	denarios 10.	»	27
48.	19-21.	et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{13}$, et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{13}$	et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{13}$	16 v.°	2-3
50.	20.	triangolj	triangulj	17 r.°	16
56.	9.	quadratrorum	quadratorum	19 r.°	20

70.	2.	*t k* in *k t*	*t k* in *k l*	22 v.°	26
71.	6.	alij duo (*sic*)	duo alij	23 r.°	17
73.	23.	demonstrationem (*sic*). Ponam quod sit	demonstrationem. Sic ponam quod sit	24 r.°	3-4
74.	14.	accipiatu	accipiatur	»	19
»	26.	ad *m l*	ad *l m*	»	27
75.	3.	non quadrutum	non quadratum	»	31
»	7.	numerus d. 5	numerus . *d*. 5.	»	33
»	in marg.	*fol.* 24 *recto*	*fol.* 24 *verso*		
»	8-9.	et *d* sit 4	et *b* sit 4	» v.°	1
»	9.	faciunt . 15	faciunt. 25	»	2
»	13.	vel unus	uel unus	»	5
»	23.	Sɪ ab unitate	Sɪ ᴀb unitate	»	12
»	26.	equatus sexcuplo	equatur sexcuplo	»	15
76.	28.	in numerum *i e*	in numerum *e i*	25 r.°	5
»	31.	d numero *e z*	á numero *e z*.	»	7
77.	10.	sescuplo	sexcuplo	»	14
»	12.	sexcuplo	et sexcuplo	»	15
»	28.	*b g g d*.	*b g*, *g d*	»	26
78.	in marg.	*fol.* 25 *verso*	*Deve stare due righe più in basso*		
»	13.	*p e*, *e z*	*d e*, *e z*	25 v.°	3
»	16-17.	*de.* erit ergo	*d e*: erit ergo	»	6
80.	1.	Eademque	Eᴀdemque	26 r.°	4
81.	in marg.	*fol.* 25 *verso*	*fol.* 26 *verso*		
83.	»	*fol.* 27 *rect*	*fol.* 27 *recto*		
89.	16.	inb sunt	qui sunt	29 r.°	7
90.	28.	in proportione quamhab et *g b*	in propositione (*sic*) quam habet *g b*	» v.°	6-7
91.	14.	*ro* unum	*ro*, unum	»	19
»	15.	*op*, uel *p q*	*o p* uel *p q*	»	»
92.	12.	habentur 840	habetur 840	30 r.°	7
»	in nota.	habentur 840	habetur 840		
94.	21.	procreatus ex *e*	procreatur ex *e*	30 v.°	14
96.	5.	Vᴏʟᴏ	VOlo	31 r.°	10
»	15.	(1)	(1)		
99.	22-23.	proueniet et ex diuisione	proueniet ex diuisione	32 r.°	7
101.	6.	$\frac{625}{576}$	$\frac{6}{5}\frac{2}{7}\frac{5}{6}$	» v.°	5
»	7.	$\frac{12}{5}\frac{25}{76}$	$\frac{12}{5}\frac{2}{7}\frac{5}{6}$	»	6
»	8.	$\frac{600}{576}$ ex $\frac{625}{576}$	$\frac{6}{5}\frac{0}{7}\frac{0}{6}$ ex $\frac{6}{5}\frac{2}{7}\frac{5}{6}$	»	7
»	26.	*b* g	*b g*	»	20
104.	1.	Vᴏʟᴏ	VOlo	33 v.°	1
»	in marg.	*manca l' indicazione fol.* 33 *verso*			
»	28.	*a* nec non	*a*, nec non	»	20
106.	5.	hoc quod	hoc (*sic*) quod	34 v.°	11

108.	23.	Et Si	Et si	35 r.°	5
»	26.	quadratis solutionem	quadratis. Solutionem	»	5
»	31.	numeros inueniemus	numeros. Inueniemus	»	11
109.	14.	quam habet	quam quam (*sic*) habet	»	22
110.	21.	nouerarij	nouenarij	» v.°	17
112. in marg.		*fol.* 36 *verso*	*deve stare una riga più sopra*		
114.	9.	faciant quadratum numerum	faciant quadratum	36 v.°	33
115.	23.	1 nS0. per quem	10. Super quem	37 r.°	30
117.	16.	in ruperficie	in superficie	38 r.°	3
120.	15.	quadrati : scilicet	quadrati, scilicet	» v.°	28
122.	12.	aggregatio	agregatio	39 v.°	5
Fig.	37	f-	b		





Fig. 1

Fig. 8

Fig. 12

Fig. 15

Fig. 16

Fig. 17

Fig. 22

Fig. 23

Fig. 28

Fig. 29

Fig. 34

Fig.



INDICE





41